2002年大学入試の背景を探る (2)

——極方程式に関連して——

宮川(みやかわ)　幸隆(ゆきたか)

§1. '02年慶應義塾大学・医学部の1番の(2)

本稿では，まず，標題の問題

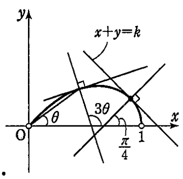
> 実数 $x>0$，$y>0$ が $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ なる関係を満たしながら変わるとき，$x+y$ のとる値が極大になる x，y の値を
>
> $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $\left(r>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$
>
> により表すと $r=\boxed{(え)}$，$\theta=\boxed{(お)}$ である．

の背景を探ります．曲線

$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ ……①

$(x>0,\ y>0)$

の概形は右図のようであり，**レムニスケート**と呼ばれる曲線①の第1象限の部分です．



本問の背景は，図にも示したように，レムニスケート $r^2=\cos 2\theta$（これが①の極方程式です!!）の法線と x 軸の正の向きとのなす角が 3θ であるという事実です．このことの証明を与えるのが本稿の目標の1つですが，この事実を用いれば，$x+y$ のとる値が極大になるのは，最大になるときで，接線の傾きは -1 であるから，法線の傾きは1であり，

$3\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であるので（上図参照），(お)$=\dfrac{\pi}{12}$，

(え)$=\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$ と求まります．

§2. 上述の事実の証明

レムニスケート $r^2=\cos 2\theta$ の第1象限の部分は，

$\cos 2\theta>0$ と，$0<2\theta<\pi$ とから，$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

すなわち $r^2=\cos 2\theta$　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ ……②

と表されます．この節では次の命題を示しましょう．

> **命題1**　レムニスケートの第1象限部分②の法線と x 軸の正の向きとのなす角は，3θ である．

証明　①の両辺を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}(x^4+2x^2y^2+y^4)=2x-2y\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\ 4x^3+4xy^2+2x^2\cdot 2y\frac{dy}{dx}+4y^3\frac{dy}{dx}=2x-2y\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore\ (2y^3+2x^2y+y)\frac{dy}{dx}=x-2x^3-2xy^2$$

$$\therefore\ -\frac{dy}{dx}=\frac{2xy^2+2x^3-x}{2y^3+2x^2y+y}$$

$$\therefore\ -\frac{dx}{dy}=\frac{2y^3+2x^2y+y}{2xy^2+2x^3-x}$$

これが法線の傾きであるが，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると，

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{2r^3\sin^3\theta+2r^3\cos^2\theta\sin\theta+r\sin\theta}{2r^3\cos\theta\sin^2\theta+2r^3\cos^3\theta-r\cos\theta}$$

$$=\frac{2r^2\sin\theta+\sin\theta}{2r^2\cos\theta-\cos\theta}=\frac{2\cos 2\theta\sin\theta+\sin\theta}{2\cos 2\theta\cos\theta-\cos\theta}\quad(\because\ ②)$$

$$=\frac{2(1-2\sin^2\theta)\sin\theta+\sin\theta}{2(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-\cos\theta}=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{4\cos^3\theta-3\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}=\tan 3\theta$$

§3. '02年大阪大学・理，工，基礎工（後期）の3番

次に，標題の問題

> $0<t<1$ とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上に点 $\mathrm{A}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ をとる．
>
> Aを通り直線 $y=x$ に直交する直線と $y=x$ の交点をPとし，原点に関してPと対称な点をQとする．
>
> (1) QとAを通る直線を l とするとき，l の傾きを求めよ．

(2) l 上に点Rを A に関して Q の反対側にとる．$\angle$PAR の 2 等分線が点 A におけるこの曲線の接線と直交するときの t^2 の値を求めよ．

の背景を探ります．本問の背景は，双曲線の焦点の性質です．P，Q が双曲線の焦点ならば $\angle$PAQ を点 A における接線が 2 等分しますので，法線はその外角を 2 等分します．したがって，(2)のときの P，Q は焦点になっているだろうと予想できますが，その予想が正しいことをまず示しましょう：

点 $x+yi$ を原点の回りに 45° 回転して得られる点を $X+Yi$ とすると，

$$X+Yi=(\cos 45°+i\sin 45°)(x+yi)$$
$$=\frac{x-y}{\sqrt{2}}+\frac{x+y}{\sqrt{2}}i \quad \cdots\cdots③$$

であるから点$(X,\ Y)$が双曲線

$$y=\frac{1}{x} \quad \cdots\cdots④$$

上にあるとすると，点$(x,\ y)$は④を原点の回りに $-45°$ 回転して得られる曲線⑤上にある．③から，$(X,\ Y)=\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}},\ \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$ を $Y=\frac{1}{X}$ に代入すると

$$x^2-y^2=2 \quad \cdots\cdots⑤$$

これが曲線⑤の方程式である．

さて，(2)の t^2 の値は

$$t^2=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$$

であり，$t=\sqrt{2}-1$ ($\because\ 0<t<1$)，

$$\mathrm{P}\left(\frac{t^2+1}{2t},\ \frac{t^2+1}{2t}\right),\ \mathrm{Q}\left(-\frac{t^2+1}{2t},\ -\frac{t^2+1}{2t}\right)$$

〔参考文献[1]参照〕であるから，(2)のときの P，Q は

$$\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ \mathrm{Q}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$$

である．そして，これらを原点の回りに $-45°$ 回転して得られる点をそれぞれ P′，Q′ とすると，

$$(\cos 45°-i\sin 45°)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$$
$$=(1+1)+(1-1)i$$

等から P′(2, 0)，Q′(−2, 0) となり，$2=\sqrt{2+2}$ から P′，Q′ は双曲線⑤の焦点であるから，(2)のときの P，Q は確かに双曲線④の焦点である．

以上のことは，双曲線の極方程式を用いても確かめることができます．そのために，まず，双曲線⑤の焦点 P′(2, 0) が原点となるように，⑤を x 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線

$$(x+2)^2-y^2=2 \quad \cdots\cdots⑥$$

を考え，⑥かつ $\sqrt{2}-2\leqq x$ の極方程式を求めましょう：

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を⑥へ代入して

$$r^2\cos^2\theta+4r\cos\theta+4-r^2\sin^2\theta=2$$
$$\therefore\ r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4r\cos\theta+2=0$$
$$\therefore\ r=\frac{-2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}}{2\cos^2\theta-1}$$
$$=\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}\cos\theta\mp 1)}{(\sqrt{2}\cos\theta+1)(\sqrt{2}\cos\theta-1)}$$
$$\therefore\ r=\frac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\cos\theta} \quad \cdots\cdots⑦ \text{ or}$$
$$r=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \quad \cdots\cdots⑧$$

もし，⑦が求める極方程式だとすると，

$$x=r\cos\theta=\frac{-\sqrt{2}\cos\theta-1+1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$$
$$=-1+\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$$

であり，$\cos\theta=-1$ のときは $\sqrt{2}-2>x$ となってしまう．⑧のときは

$$x=r\cos\theta=\frac{\sqrt{2}\cos\theta-1+1}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$$
$$=-1+\frac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$$

の最小値は $\cos\theta=-1$ のときであって $\left(\because\ \cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，その最小値は

$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-2$ であるから，⑧が求める極方程式である．

さて，(2)のとき $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ でしたが，A は $\mathrm{A}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ で，$\mathrm{AP}=\sqrt{2}$ です．

⑧を $r=f(\theta)$ と書くとき，

$$\mathrm{AP}=f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots\cdots⑨$$

が成り立てば，(2)のときの P，Q が④の焦点であることになります．しかるに，確かに，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}$ ですから，⑨は成り立ちます．

《参　考　文　献》

[1] 雑誌「大学への数学」'02年5月号，特集 2002 年大学入試問題，東京出版

[2] 雑誌「大学への数学」'02年6月号，特集 2002 年大学入試問題，東京出版

(静岡県立三島北高等学校)