2002 年大学入試の背景を探る (1)

宮川(みやかわ) 幸隆(ゆきたか)

§0. '02 年九州大学・理系 (前期) の 2 番

本稿では，標題の問題

> 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す．ただし，1 および a 自身も約数とする．例えば $f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．
>
> (1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする．このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ．
>
> (2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．
>
> (3) 正の偶数 a，b は，ある整数 m，n とある奇数 r，s を用いて $a=2^m r$，$b=2^n s$ のように表すことができる．このとき a，b が $\begin{cases} f(a)=2b \\ f(b)=2a \end{cases}$ を満たせば，r，s は素数であり，かつ $r=2^{n+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となることを示せ．

の背景を探ります．本問の背景は「偶数の完全数」です．そこで，完全数とは何か？から説明していくことにしましょう．

§1. 完全数

古代ギリシアの数学では，ある正の整数 a の正の約数 (1 を入れ，a を入れない) の和が a に等しいときに a を **完全数** (perfect number) と称しました．すなわち，a が完全数であるとは，上の問題の f を用いれば，$f(a)=2a$ を意味するのです．例えば

$$6=1+2+3,$$
$$28=1+2+4+7+14$$

であるから，6 や 28 は偶数の完全数です．

本稿投稿時，奇数の完全数は一つも知られていません．奇数の完全数に関する研究は **OPP** (odd perfect number problem) と呼ばれていて，大変な難問に関する研究です．

さて，上の 2 つの式から，

$$f(6)=2\times6,$$
$$f(28)=2\times28$$

なのですが，$f(6)$ や $f(28)$ をもっと構造的に捉えてみましょう：

6 の素因数分解は $6=2\times3$ であり，

28 の素因数分解は $28=2^2\times7$ です．

よって，

$$f(6)=(1+2)\times(1+3)=3\times4=2\times6,$$
$$f(28)=(1+2+2^2)\times(1+7)=7\times8=2\times28$$

なのです．一般に，**正の整数 a の素因数分解を**

$$\boldsymbol{a=p^\alpha q^\beta\cdots\cdots r^\gamma}$$

とすると，

$$\boldsymbol{f(a)=(1+p+\cdots\cdots+p^\alpha)(1+q+\cdots\cdots+q^\beta)\times\cdots\cdots\times(1+r+\cdots\cdots+r^\gamma)}$$

なのです．そこで次の命題が成り立ちます：

> **命題 1**　2 つの正の整数 a と b が互いに素ならば
> $$f(ab)=f(a)f(b)$$

証明はするまでもないでしょう．($\because$ a と b が互いに素であるから，$a=p_1{}^{\alpha_1}q_1{}^{\beta_1}\cdots\cdots r_1{}^{\gamma_1}$ と $b=p_2{}^{\alpha_2}q_2{}^{\beta_2}\cdots\cdots r_2{}^{\gamma_2}$ を素因数分解とすると，

$$\begin{aligned}f(ab)=&(1+p_1+\cdots\cdots+p_1{}^{\alpha_1})(1+q_1+\cdots\cdots+q_1{}^{\beta_1})\\&\times\cdots\cdots\times(1+r_1+\cdots\cdots+r_1{}^{\gamma_1})\\&\times(1+p_2+\cdots\cdots+p_2{}^{\alpha_2})(1+q_2+\cdots\cdots+q_2{}^{\beta_2})\\&\times\cdots\cdots\times(1+r_2+\cdots\cdots+r_2{}^{\gamma_2})\end{aligned}$$

となるからです)

さて，上の命題 1 から，次の定理が成り立ちます：

> **定理 1**　$a=2^{n-1}(2^n-1)$ (ただし $n>1$) において 2^n-1 が素数ならば，a は完全数である．

証明　命題1から

$$\begin{aligned} f(a) &= f(2^{n-1})f(2^n-1) \\ &= (1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})\times(1+2^n-1) \\ &= \frac{2^n-1}{2-1}\times 2^n = 2a \end{aligned}$$

■

Eulerは，この定理1の逆を示しました．その証明はすこぶる面白いものです：

> **定理2**　aが偶数の完全数ならば，
> $a=2^{n-1}(2^n-1)$ ($n>1$，2^n-1 は素数)
> の形に表される．

証明　aを偶数の完全数とし，

$$a=2^{n-1}b \quad (n>1,\ b\text{ は奇数})$$

とすると，命題1から，

$$\begin{aligned} f(a) &= f(2^{n-1})f(b) \\ &= (2^n-1)f(b) \end{aligned}$$

一方，aは完全数であるから

$$(2^n-1)f(b)=2a=2^nb$$

$$\therefore\ f(b)=\frac{(2^n-1)b+b}{2^n-1}=b+\frac{b}{2^n-1}$$

この式から $\dfrac{b}{2^n-1}$ は整数であるが，$n>1$ であるから，bよりも小さいbの約数である．すなわち，$f(b)$がbの2つの相異なる約数の和に等しいから，bはただ2つの約数を有することになって，bは素数であり，

$$\frac{b}{2^n-1}=1$$

$$\therefore\ b=2^n-1$$

■

2^n-1 ($n>1$) が素数であるためには，nが素数であることが必要です ($\because$ $n=ml$ ($m>1$，$l>1$) とすると $2^n-1=(2^m)^l-1$ は $2^m-1\geqq 3$ の倍数であるから)．しかし，それは十分な条件ではありません．

$n=2$，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127 のときは 2^n-1 は素数であることが知られています．$2^{127}-1$ は39桁の素数です．しかし，

$$2^{11}-1=2047=23\times 89$$

のように，$n=11$ のときは 2^n-1 は素数ではありません．偶数の完全数 $a=2^{n-1}(2^n-1)$ を小さい方からいくつかを表にすると，

n	2^n-1	$a=2^{n-1}(2^n-1)$
2	3	6
3	7	28
5	31	496
7	127	8128
13	8191	33550336
17	131071	8589869056

となります．

さて，§0の九州大の問題に戻りましょう：
(1)は定理2の証明の2行目から5行目までと同様にして示されます．(2)も定理2の証明の9行目から15行目までと同様の考え方で解決します．(3)は少し面倒ですが，(1)と(2)をうまく用いることによって示されます (詳しくは参考文献の [2] を参照して下さい)．

ところで，この(3)で $a=b$ のときを考えれば，
「aが偶数の完全数であるのは，
$a=2^m(2^{m+1}-1)$ ($m>0$，$2^{m+1}-1$ は素数)
のときに限る．」と主張していることになるので，この問題は定理2の拡張を正面切って証明することを目差した，本格的な難問ということになります．

《参　考　文　献》

[1] 高木貞治 著，初等整数論講義，共立出版

[2] 雑誌「大学への数学」'02年4月号，特集2002年大学入試問題，東京出版

(静岡県立三島北高等学校)