——教育現場における基礎研究——

絶対値不等式の扱いをめぐって

小栗（おぐり） 是徳（よしのり）

1. はじめに

本稿は，下記の「絶対値不等式」について，その同値性を検証するとともに，この扱いをめぐって具体的に生徒にはどう指導するべきか，その教育的指導について論じたものである．以下，$x\in\mathbb{R}$（実数の集合），$F(x)$，$G(x)$ は実数値関数とする．

命題Ｉ，$\lvert F(x)\rvert>G(x)\Longleftrightarrow F(x)>G(x)$ または $F(x)<-G(x)$
命題II，$\lvert F(x)\rvert<G(x)\Longleftrightarrow -G(x)<F(x)<G(x)$

(1)　12 年前の同僚との平行線

当時ある生徒が，上記の「絶対値不等式」の公式（？）を使って問題を解いてきたので，「この公式は公には認められていないので，使ってはいけない」と指導したところが，同僚のＡ教諭から「この公式は，成り立つので使っていいのだ」と抗議を受けた．どうやら生徒の方は，この同僚から公式を伝授されていたようだ．これに対して，私の方は「訳のわからない公式を使って生徒に解かせても本当に解けたとはいえないので，たとえ成り立つとしても好ましくない」と反論した．同僚も「正しいものは使わせて良い」と譲らなかった．今にして思うと，当時どうして論証しなかったか悔やまれるところである．

(2) ネット上の議論

最近偶然，ある同僚とこの公式について話題になったが，本校の南俊明教諭から「このテーマなら，かつてネット上で話題になった」と指摘された．検索の結果，北海道算数数学教育研究会の「数学教育実践研究会」の有力中心メンバーの中村，真鍋，早苗各先生であることがわかった．そこで，この中の早苗先生（札幌新川高校）にお願いし，「ネット上の議論」についての資料を入手した．

さて，当時の「ネット上の議論」を要約すると，次のようになると思う．

① 中村文則先生（当時札幌新川高校）

$\lvert 2x-3\rvert\leqq x+1$，$\lvert 3x-1\rvert>x+3$，$\lvert x-1\rvert\geqq 2x+3$

を例にして，「絶対値不等式の公式」を使うことは許されるか？

$\lvert A\rvert>B\Longleftrightarrow A<-B,\ B<A$

$\lvert A\rvert<B\Longleftrightarrow -B<A<B$

は，B の正負に関わらず成立するので，A，B が整式でも同様に成り立つと思う．

② 真鍋先生（札幌篠路高校）

「$\lvert ax+b\rvert<cx+d\Longleftrightarrow -(cx+d)<ax+b<cx+d$」は，成り立たないのではないか．理由は，一般に，$-(cx+d)<cx+d$ とはならないから．

③ 早苗先生（当時札幌稲北高校）

「$A<-B$，$B<A$」を「$A<-B$ または $B<A$」，「$-B<A<B$」を「$-B<A$ かつ $A<B$」と，それぞれ言い換えておく必要がある．

④ このほかにも，宮田先生（山梨市），近岡先生（富山県高岡西高校），安田さん（稚内市），古川先生（SEG）から，いろいろと示唆に富む指摘があった．

2.「絶対値不等式」の同値性についての論証

(1) 結論から言えば，Ｉ，IIとも成立．

証明のポイントは，集合から $\forall x$（任意の x）をとってきて fix（固定）することによって，$F(x)$，$G(x)$ を「ある１つの定数」とすることにある．当然，このような x が存在しないとき，その集合は $\varnothing$（空集合）にほかならない．

一方，集合を使わずに「命題の論理」で詰めた場合，慣れていないと混乱する．論理の真偽について確認しておきたい．例えば，「$\varnothing$（空集合）$\subset$（任意の集合）」を論理で言い換えると，p が偽のとき q の真

偽に関わらず「$p \Longrightarrow q$ は恒真命題」である．

(2) 以下，各命題の真偽について，論証する．

命題 I「$|F(x)|>G(x) \Longleftrightarrow F(x)>G(x)$ または $F(x)<-G(x)$」の証明

$A \equiv \{x \in \mathbb{R} : |F(x)|>G(x)\}$

$B \equiv \{x \in \mathbb{R} : F(x)>G(x)$ または $F(x)<-G(x)\}$

とおくとき，$A=B$ を示す．

$A \ni \forall x$ に対して，$|F(x)|>G(x)$

CASE 1：$F(x) \geqq 0$ のとき，

$F(x)>G(x) \quad \therefore\ x \in B$

CASE 2：$F(x)<0$ のとき，$-F(x)>G(x)$

つまり，$F(x)<-G(x) \quad \therefore\ x \in B$

いずれにしても，$x \in B$ よって，$A \subset B$ …… ①

$B \ni \forall x$ に対して，

$F(x)>G(x)$ または $F(x)<-G(x)$

$\Longrightarrow F(x)>G(x)$ または $-F(x)>G(x)$

ここで，$|F(x)| \geqq F(x)$ かつ $|F(x)| \geqq -F(x)$ より

$\Longrightarrow |F(x)|>G(x)$ よって，$A \supset B$ …… ②

①，②より，$A=B$ よって，命題 I が成立 □

上の証明を，「ネット上の議論」に関連づけるため，あえて別証明する．

命題 I の別証明

$\mathbb{R} \ni \forall x$ に対して，$G(x)$ について場合分けすると，(ネット上で稚内の安田さんも指摘している通り，以下の CASE 2 が少しわかりにくくなる．

$F(x)$，$G(x)$ を「ある 1 つの定数」とすることを再確認したい．)

CASE 1：$G(x) \geqq 0$ のとき，

$|F(x)|>G(x) \Longleftrightarrow F(x)>G(x)$ または $F(x)<-G(x)$ は成立する．

CASE 2：$G(x)<0$ のとき，

$|F(x)|>G(x) \Longleftrightarrow F(x)>G(x)$ または $F(x)<-G(x)$ は成立する．

($\because$ p，q がともに真のとき，「$p \Longleftrightarrow q$ は恒真命題」)

よって，いずれにしても命題 I が成立

命題 II「$|F(x)|<G(x) \Longleftrightarrow -G(x)<F(x)<G(x)$」の証明

$C \equiv \{x \in \mathbb{R} : |F(x)|<G(x)\}$

$D \equiv \{x \in \mathbb{R} : -G(x)<F(x)<G(x)\}$

とおくとき，$C=D$ を示せばよいが，

「命題 I，$|F(x)|>G(x) \Longleftrightarrow F(x)>G(x)$ または $F(x)<-G(x)$」

は，$>$を$\geqq$で置き換えても全く同様に成立するので，この両者の補集合からすぐに $C=D$ が従う． □

上の証明で論証的にはすっきりするが，間接的証明のためその途中がみえなくなってしまうのが残念である．そこで，改めて直接証明する．証明は，集合を使う方が明快だが，これも「ネット上の議論」にも関連づけるため，あえて別証明する．

命題 II の別証明

$\mathbb{R} \ni \forall x$ に対して，

CASE 1：$G(x)>0$ のとき，明らか．

CASE 2：$G(x) \leqq 0$ のとき，

$|F(x)|<G(x) \Longleftrightarrow -G(x)<F(x)<G(x)$

($\because$ p，q がともに偽のとき，「$p \Longleftrightarrow q$ は恒真命題」)

よって，命題 II が成立 □

命題 I，II に関連して，次の命題を確認しておく．

命題 III「$|F(x)|=G(x) \Longrightarrow F(x)=G(x)$ または $F(x)=-G(x)$」の証明

$\mathbb{R} \ni \forall x$ に対して，

CASE 1：$G(x) \geqq 0$ のとき，明らか．

CASE 2：$G(x)<0$ のとき，

$|F(x)|=G(x) \Longrightarrow F(x)=G(x)$ または $F(x)=-G(x)$

($\because$ p が偽のとき，q の真偽に関わらず「$p \Longrightarrow q$ は恒真命題」)

いずれにしても，命題 III の$\Longrightarrow$が示された．

Remark 1

命題 III の逆，$\Longleftarrow$は成立しない．

($\because$ 反例は，$G(x)<0$ のときである．)

命題 I，II，III が成立すると認められたので，系を紹介する．

命題 I，II，III の系

(1) $|F(x)|>|G(x)| \Longleftrightarrow -F(x)<G(x)<F(x)$ または $F(x)<G(x)<-F(x)$

(2) $|F(x)|=|G(x)| \Longleftrightarrow F(x)=G(x)$ または $F(x)=-G(x)$

系の証明

(1)は，命題 I，命題 II より成立．(2)の$\Longrightarrow$は，III を繰り返し使う．$\Longleftarrow$は，代入による． □

Remark 2

以上の中で，$F(x)$，$G(x)$ を実数値関数としてきた．つまり，連続性や微分可能性などの他の条件は一切仮定していないので，各命題は任意の実数値関数 $F(x)$，$G(x)$ について成立する．

また，$x \in \mathbb{R}$ としたが，次元を拡張して

$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\in\mathbb{R}^n$（$n$次元ユークリッド空間）としても成立する．このとき，$F(x)$，$G(x)$ は，多変数の実数値関数となる．このときの写像は，「$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$」である．

3. この扱いをめぐって具体的に生徒にはどう指導するべきか，その教育的指導について

(1) この「絶対値不等式」を生徒に紹介すべきか？

これについての回答は，明らかに「否」であろう．「ネット上の議論」でみられる通り，我々教師自身が混乱してしまうことを，生徒に使わせるべきではない．ただし，生徒の実態に応じた指導を考えれば，上記の論証が理解でき，その公式の使い方まで含めて指導できる一部の生徒については，この限りではない．そうでない大部分の生徒に対しては，「$G(x)=a$（正の定数）のとき」に限って，指導しておくのが無難である．このときは，命題Ⅲの逆，$\Longleftarrow$ も成立している．これが，「公式」として認められているのは周知の通りである．

(2) 生徒に紹介すべきでないもう１つの理由

仮にこれを生徒に紹介した場合，どういうことが起きるか想像してほしい．生徒は，公式の意味がわからずに，ただ答えを出す「計算マシーン」と化してしまうばかりか，特に $G(x)<0$ のときに至っては混乱してしまうはずである．混乱しないために，絶対値の場合分けがあるわけだから，これでは本末転倒である．具体的に，trivial な例をあげる．

命題Ⅳ「$|x|>-2 \Longleftrightarrow x>-2$ または $x<-(-2)$」は，いずれも解集合が $\mathbb{R}$（実数全体）となって成立する．

命題Ⅴ「$|x|<-2 \Longleftrightarrow -(-2)<x<-2$」は，いずれも解集合が $\varnothing$（空集合）となり成立．

命題Ⅵ「$|x|=-2 \Longrightarrow x=-2$ または $x=-(-2)$」

は成立するが，逆は成り立たない．

この命題Ⅳ～Ⅵの trivial な例は，論証上は trivial であっても，教育上は trivial どころか，大混乱を引き起こしてしまう．つまり，論証上の trivial とは，わかっている人だけにとっての trivial であって，そうでない人にとっては trivial でないわけである．この両者間には，相当な開きがあることを認識しておく必要がある．

例えば命題Ⅵは，論証上成立するが，仮に問題「方程式 $|x|=-2$ を解け．」と与えられたら，同値関係が崩れているので，当然答えは「x は解なし」である．

(3) 絶対値の指導目的は何か

数学教育の目的の１つに，生徒自身が自ら考えて自分の答えを作成するという点がある．絶対値の指導目的は，絶対値の意味や必要性を理解させ，その使い方では絶対値についての場合分けをきちんとさせることである．途中を無視して答えのみを出させることは，目的と手段の履き違えである．実際，$|x|=\pm x$ という指導を受けた生徒の中には，$|2|=\pm 2$，$|-2|=\pm(-2)$，という誤用がよくみられる．絶対値が出てくると，生徒は理解しにくいのですぐ公式に頼って機械的に解こうとしてしまう．そうではなく，時間をかけてこれを数学的にきちんと指導するのが我々数学教師の責任ではないか．

4. まとめ

最近の私は，「教育現場における基礎研究」という立場でいろいろと発信している．つまり，我々数学教師は，あまりに教育現場に偏り過ぎ基礎研究を怠っていないかというシグナルである．今回のテーマはその主張を裏付けるという意味で好例であったと思う．今回の論証も，基礎研究という立場からできたからである．当然論証は，具体的に考えるより抽象的に処理するが，今回の場合もまさにそのひとつであった．論証は，数学にとって生命線のようなもので，これを欠いたりあいまいにしては，いかなる主張も認められない．ところが，現場では目の前にいる生徒に対してどう対処するかという指導法ばかりに気をとられ，この精確な論証を怠ってしまう傾向にある．冒頭にあげた同僚のＡ教諭との平行線もそうであった．生徒ならともかく，我々数学教師自身が論証を怠って，訳のわからない公式を生徒に紹介することだけは避けたいものである．当然，きちんと論証した上で紹介するか否か判断すべきである．

今回の絶対値不等式のように，高校数学では基礎研究の面から論証が不十分だったり，未確認のものがほかにもある．もし数学的論証のないまま現場で扱うのであれば，それは，「理論なき実践」で危険極まりない．今後も現場における具体例について，理論的，実践的な基礎研究を積み重ねていきたい．

（北海道石狩南高等学校）