内積と関数解析と入試問題
――ルジャンドルの多項式を中心に――

石橋（いしばし）　信夫（のぶお）

I　プロローグ

新課程での，内容，時間数の大幅な削減，また受験人口の減少から，数学に強い興味・関心を持っている生徒に対する指導も今までとは質の違った内容が求められる．1つの具体的な方法として，総合学習の時間の活用が考えられる．数学の持つ深遠さ，体系の美しさを何らかの教材で示し，興味・関心を深め，普段の学習に生かしたり，自らが，進んで新しい分野を学んでいく様にしてはどうか．その教材は，高校数学と大学数学との橋渡しをする教材で，しかも微分積分や線形代数といった縦断的教材よりも1つの項目をキーにした横断的教材の方が望ましい．その1例として内積と関数解析を取り上げた．高校数学において内積は代数の分野ではあるが，定積分の所でも少し顔を出す．内積は幾何学的見地から始まったが，垂直やノルムを武器に無限次元の関数空間を秩序ある幾何学的空間に変えていく．

教育課程が変わっただけでなく，実は高校教師の役割も一部で変わりつつある．埼玉県ではいくつかの公立高校が地元の大学と提携し，大学の講義を受講した生徒に，その単位を高校の単位として認定している．具体的には県立浦和高校の生徒の平成12年度の数学の受講内容を見ると，現代数学序論という講座を受講した生徒が3名いた．この事からもわかる様に，受講した生徒からその内容の質問を受けたり，高校数学とのつながりを質問される事が予想される．

以下に内積と関数解析の入り口の部分を述べてみる．単に関数解析の説明ではなく，高校の内容とどう結びつけていくのか，自分なりに示したつもりである．フーリエ変換は，熱伝導や波動だけではなく，CTスキャン，DNAの二重らせんの回析，画像処理にも用いられ，話の頂点とした．ルジャンドルの多項式は話の途中の事項ではあるが，内積や基底がからみ合う重要な項目で，それが背景にある入試問題もいくつか取り上げた．

II　内積と関数解析

1. 内積とノルムの公理

内積を一言で表すならば，2つのベクトルが互いにどの程度近いか，その程度を表す量である．統計における相関係数が内積そのもので，例えば，互いに独立の時(垂直)には0となる．次に内積とノルムの公理を述べるが，公理とは，定義の前提となるそれ以上根拠を追求しないものである．

(1) 内積の公理

$\mathbb{C}$上のベクトル空間 V の2元 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に対して，次の4つの条件を満たす$\mathbb{C}$の元 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積とよぶ．

(i) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$

(ii) $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}$

(iii) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ $(k\in\mathbb{C})$

(iv) $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}>0$

(2) ノルムの公理

$\mathbb{C}$上のベクトル空間 V の各点 $\boldsymbol{a}$ に対して実数 $\|\boldsymbol{a}\|$ が対応して，次の4つの条件を満たしているとき V を$\mathbb{C}$上のノルム空間といい，$\|\boldsymbol{a}\|$ を $\boldsymbol{a}$ のノルムとよぶ．

(i) $\|\boldsymbol{a}\|\geqq 0$

(ii) $\|\boldsymbol{a}\|=0 \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(iii) $\|k\boldsymbol{a}\|=|k|\|\boldsymbol{a}\|$ $(k\in\mathbb{C})$

(iv) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqq\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$

2つの公理は$\mathbb{C}$上としたが，これからは話を簡単にするためになるべく$\mathbb{R}$上とする．

内積からノルムは $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$

ノルムから内積は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left\|\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right\|^2-\left\|\dfrac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right\|^2$ となる．

内積やノルムは公理さえ満たせばよいので，当然色々な内積やノルムが考えられる．例えば，

$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$ において
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+3a_2b_2$ も内積であるし，平面において $\|\boldsymbol{a}\|=|a_1|+|a_2|$ や，
$\|\boldsymbol{a}\|=\max\{a_1,\ a_2\}$ もノルムである．

(3) 高校数学における 3 つの内積の定義の比較

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$

(ii) $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2$

(iii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{4}\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2\}$

(iii)は古い参考書に載っていたが，現在では見ない．内積の大切な性質である分配法則を
$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}$ とする．(i)は，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときの角 θ はどうなのか，角 θ の定義をしっかりとしておかなければならない．また，分配法則を示すにも時間がかかる．内積を複素数まで拡張すると，角は直交と重なる場合以外意味をもたなくなる．(ii)は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ の時の $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ や分配法則もすぐに導かれる．ただ内積の値が，座標のとり方，すなわち正規直交基底上の座標だから成り立っているのである．(iii)は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときの $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ はすぐに導かれるが，分配法則はすぐには導かれない．

2. 連続関数空間の自然内積とノルムの定義

(1) 自然内積の定義とノルムの定義

区間 $[-1,\ 1]$ で連続な実数値関数全体の作る実ベクトル空間上の関数 f, g に対して

$$f\cdot g=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx \text{ と定義する．}$$

これが内積の公理を満たすには(i)〜(iv)を確かめればよい．特に問題になるのは(iv)であるが，連続関数の性質から $f\neq 0$(右辺の 0 は定数関数)とすると，$f(x)\neq 0$ なる点の近くでは常に $\{f(x)\}^2>0$ より
$f\cdot f=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx>0$ 　　ノルムについては
$\|f\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx}$ と定義する．これがノルムの公理を満たすには(i)〜(iv)を確かめればよい．特に問題になるのは(iv)の三角不等式である．その証明のためには，次のシュワルツの不等式が必要となる．
$|f\cdot g|\leqq\|f\|\|g\|$ …… ① の証明

$f=0$ の場合は両辺$=0$ となり①は成り立つ．
ここで補助の実数の変数 t を導入して
$\|tf+g\|^2=t^2(f\cdot f)+2t(f\cdot g)+(g\cdot g)\geqq 0$ より
t の判別式を考えると $|f\cdot g|^2\leqq\|f\|^2\|g\|^2$
ここで 2 乗を外すと①が成り立つ．(iv)の証明は

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2&=(f+g)\cdot(f+g)=\|f\|^2+2(f\cdot g)+\|g\|^2\\&\leqq\|f\|^2+2\|f\|\|g\|+\|g\|^2 \text{ ……(①より)}\\&=(\|f\|+\|g\|)^2\end{aligned}$$

ここで 2 乗を外すと(iv)が示される．積分区間が $[-1,\ 1]$ なのは積分の値が意味を持つ様にするためである．

(2) 積分の新しい働き方と関数解析の発想

2 つの連続関数 $f(x)$, $g(x)$ に対してその相互の関係を積分を用い，平均的な量として表したのが，自然内積である．これは積分の新しい働き方といってよい．関数をベクトルとしてとらえていく事が関数解析の発想である．高校数学の関数と大きく異なるのは，2 つの関数の距離を 2 つの点の距離と見たり，2 つの関数が直交していると考えていく事である．次元も 1, x, x^2, …… といった事から一般に無限次元である．

3. シュミットの直交化法とルジャンドルの多項式

(1) 正規直交基底の定義

n 次元の内積空間 V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ が

(i) $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0$ $(i\neq j)$

(ii) $\|\boldsymbol{e}_i\|=1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

を満たすとき正規直交基底という．
正規直交基底上での内積は $\mathbb{R}^n$ 上の内積と同じ形となり V は $\mathbb{R}^n$ と同一視することができる．

(2) シュミットの直交化法

n 次元の内積空間には正規直交基底
$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ が存在する．その作り方がシュミットの直交化法で，いわば，1 つの基底のねじれや長短を直し正規直交化していくのである．V のベクトル空間の基底を $\{\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{f}_n\}$ とする．

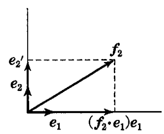
(i) $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{f}_1\|}\boldsymbol{f}_1$

(ii) $\boldsymbol{e}_2{}'=\boldsymbol{f}_2-(\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{e}_2{}'\|}\boldsymbol{e}_2{}'$

(iii) $\boldsymbol{e}_3{}'=\boldsymbol{f}_3-(\boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{e}_3{}'\|}\boldsymbol{e}_3{}'$

以下同様に
$\boldsymbol{e}_n{}'=\boldsymbol{f}_n-(\boldsymbol{f}_n\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{f}_n\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2-\cdots\cdots-(\boldsymbol{f}_n\cdot\boldsymbol{e}_{n-1})\boldsymbol{e}_{n-1}$,

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\|\boldsymbol{e}_n{}'\|}\boldsymbol{e}_n{}'$$



(ii)の場合を図で示すと右図のようになり，$\boldsymbol{e}_2{}'$ は $\boldsymbol{f}_2$ から $\boldsymbol{f}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ 方向の成分を取

り除いたものである．

(3) 自然内積における正規直交基底

$\boldsymbol{f}_1=1$，$\boldsymbol{f}_2=x$，$\boldsymbol{f}_3=x^2$ とし，シュミットの直交化法を用いて $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ を作ると

(i) $\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_1=\int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}_1{}^2dx=2$ から $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{f}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\boldsymbol{e}_2{}'=\boldsymbol{f}_2-(\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dx=x$

$\boldsymbol{e}_2{}'\cdot\boldsymbol{e}_2{}'=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$ よって $\boldsymbol{e}_2=\sqrt{\frac{3}{2}}x$

(iii) $\boldsymbol{e}_3{}'=\boldsymbol{f}_3-(\boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{f}_3\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$

$$=x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}x^2\frac{1}{\sqrt{2}}dx-\sqrt{\frac{3}{2}}x\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{\frac{3}{2}}x\,dx$$

$$=x^2-\frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{e}_3{}'\cdot\boldsymbol{e}_3{}'=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2dx=\frac{8}{45}$$

よって $\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2-1)$

この $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ を基底として $\boldsymbol{f}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{g}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$ (a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3 は定数) とすると自然内積上では $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ となる．

4. ルジャンドルの多項式

3−(3)では 1，x，x^2 までだったが，3 次以上も含めた正規直交基底が，次のルジャンドルの多項式である．

$$P_n=\frac{1}{2^nn!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$P_m\cdot P_n=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & (m=n\ \text{のとき})\\ 0 & (m\neq n\ \text{のとき})\end{cases}$$

これを正規化すると $E_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n$ となる．

3−(3)はこの $n=0$，1，2 の場合である．

ルジャンドルは 18 世紀から 19 世紀にかけてフランスで活躍した数学者で，研究分野は多岐に渡る．フェルマーの定理の $n=5$ の場合を証明したり，あの天才ガロアが一般には理解するのに 2 年はかかるといわれた「幾何学の基礎」を 2 日で読んでしまったと言われているが，その本の著者がルジャンドルである．

5. 完備性

(1) 数直線上の極限

数直線上において，例えば 0.1，0.14，0.141，…… のように第 n 項が $\sqrt{2}$ の小数 n 位までの近似値である有理数列の極限は，有理数ではない．同様に，ある関数を近似する関数列の極限が，はたして考えている空間の中に存在するかどうかが問題になってくる．そこで完備性なる概念が生まれてくる．

(2) 完備性の定義とバナッハ空間，ヒルベルト空間

ノルム空間 $\boldsymbol{X}$ が完備であるとは，$\boldsymbol{X}$ の任意の数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ について (i) $\|\boldsymbol{f}_n-\boldsymbol{f}_m\|\to 0$ (n，$m\to\infty$) ならば $\{\boldsymbol{f}_n\}$ の極限 $\boldsymbol{f}^*\in\boldsymbol{X}$ が存在することである．(i)が成り立つ事を，数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}$ が基本列をなすという．つまり，$\boldsymbol{X}$ が完備ならば $\boldsymbol{X}$ の要素からなる任意の基本列が収束することになる．(1)の例では実数全体の集合$\mathbb{R}$は完備であるが，有理数全体の集合$\mathbb{Q}$は完備でない．無限次元の関数空間では完備性を意識していく必要がある．

完備なノルム空間をバナッハ空間，無限次元のノルム空間で内積によって定義されたノルムに関して完備な線形空間をヒルベルト空間という．

6. パーセバルの等式とフーリエ級数

(1) パーセバルの等式

$\{\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，……，$\boldsymbol{e}_n\}$ を n 次元計量空間(内積の定義された空間)の正規直交基底とするとき

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+\cdots\cdots+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n$$

と表せる．

証明は $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}$ より

$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ とおくと

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_i=(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n)\cdot\boldsymbol{e}_i=x_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i=x_i$$

から明らか．この表し方はフーリエ級数につながっていく．

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_1|^2+|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_2|^2+\cdots\cdots+|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_n|^2$$

をパーセバルの等式という．これは n 次元への三平方の定理の拡張である．

証明は $\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{e}_j\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|x\cdot\boldsymbol{e}_i|^2$$

(2) フーリエ級数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

(a_k，b_k は実数)

の形の関数全体の実ベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ に

$f\cdot g=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$ によって内積を入れる時，

$2n+1$ 個の関数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right)$$

は正規直交基底となる．すると，6−(1)より a_k，b_k は

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

となり a_n，b_n をフーリエ係数という．

n を無限にもっていくと

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

となり，これがフーリエ級数である．無限の場合完備性が問題になるが，ヒルベルト空間においてはフーリエ展開できる．関数 f のフーリエ展開とは f をヒルベルト空間の点と見たときの直交座標に関する成分表示である．「任意の関数はフーリエ級数に展開できる」がフーリエの主張であり，その意味付けのためにルベーグ積分や関数解析が生まれたと言っても過言ではない．ここで $\sin x$，$\cos x$ が突然出てくるが，この事は，任意の関数は偶関数と奇関数の和として表せる事から来ている．例えば，フーリエ級数を用いて $f(x)=\dfrac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$ を展開してみると

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\cdots \text{ となる．}$$

III　ルジャンドルの多項式と４つの入試問題

ルジャンドルの多項式が出てくる入試問題は，偶関数，奇関数の定積分を用いた単なる計算問題が大部分である．しかし，その背景にあるルジャンドルの多項式を理解していれば，問題の意図が理解できるであろう．なお，ここでの解答は結果を用いているので高校生の解答と異なる場合がある．

(1) $f(x)=x^2+ax+b$ の形の２次式の中で

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ が最小となるものを求めよ．

（類 87 東京農大，91 弘前大，91 学習院大，02 滋賀県立大）

解答　自然内積の正規直交基底を用いて表すと，

$f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}e_3+c_2e_2+c_1e_1$ とかける（ただし c_1，c_2 は任意の定数）．すると直交性より

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\frac{8}{45}+c_1{}^2+c_2{}^2$$

これが最小になるのは $c_1=c_2=0$ の時で

$f(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{5}}e_3=x^2-\dfrac{1}{3}$ となる．

正規直交基底を用いる利点は，内積がすぐに求められる事にある．

(2)　(イ) $P_1(x)$ は１次式であって，任意の定数 C に対して $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_1(x)C\,dx=0$

(ロ) $P_2(x)$ は２次式であって，１次以下の任意の整式 $Q(x)$ に対して $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_2(x)Q(x)dx=0$

(ハ) $P_3(x)$ は３次式であって，２次以下の任意の整式 $R(x)$ に対して $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_3(x)R(x)dx=0$

このとき，$P_1(x)$，$P_2(x)$，$P_3(x)$ を求めよ．ただし，それぞれの最高次の係数は１である．

（87 昭和薬大，類 79 京大，類 91 岩手大）

解答　これはルジャンドルの多項式そのもので

$P_1(x)=x$，$P_2(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$，$P_3(x)=x^3-\dfrac{3}{5}x$ である．

(3) a，b，c を実数の定数として関数

$f_0(x)=1$，$f_1(x)=x+af_0(x)$，

$f_2(x)=x^2+bf_1(x)+cf_0(x)$

を考える．相異なる j，k に対して

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f_j(x)f_k(x)dx=0$ が成り立つとき，次の各問いに答えよ．

(i) 実数 a，b，c を求めよ．

(ii) $j=0$，1，2 のそれぞれに対して $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f_j(x)\}^2dx$ の値を求めよ．

（01 名古屋大（一部略））

解答　これもルジャンドルそのもので

(i) $a=0$，$b=0$，$c=-\dfrac{1}{3}$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f_0(x)\}^2dx=2$，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f_1(x)\}^2dx=\frac{2}{3}$，

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f_2(x)\}^2dx=\frac{8}{45}$

(4) ３次またはそれ以下の任意の整式

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，常に

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=uf(s)+vf(t)$ が成り立つような定数 u，v，s，t を求めよ．ただし，$s<t$ とする．

（86 東大，類 78 名古屋大）

解答　$f(x)=\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)Q(x)+mx+n$ とおく．

（ただし，$Q(x)$ は x の１次以下の整式）

すると

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)Q(x)+mx+n\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1} n\,dx=2n \quad \cdots\cdots ①$$

$s=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とすると

$$uf\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+vf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=u\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}m+n\right)+v\left(\frac{1}{\sqrt{3}}m+n\right)$$
$$=\frac{m}{\sqrt{3}}(v-u)+n(u+v) \quad \cdots\cdots ②$$

①，②が常に等しくなるためには $u=1$，$v=1$

この結果は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\dfrac{f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2}$

となる．

これは，3 次以下のどんな $f(x)$ についても $-1<x<1$ における平均の高さが，$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ と $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の平均に等しいことを示している．

Ⅳ　エピローグ

関数解析において重要なルベーグ積分や射影作用素の話も入れたかったが，紙面の都合で割愛した．ここで簡単に述べると，普通の連続関数を積分する場合はリーマン積分もルベーグ積分も差がない．しかし，関数の不連続点が増えてくるとその差がでてくる．リーマン積分とルベーグ積分の方法の違いを一言で言えば，前者は x 軸の分割，後者が y 軸の分割である．例えば，区間 [0, 1] において

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{が無理数})\\ 0 & (x\text{が有理数})\end{cases}$$ とした時，

$\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めると，リーマン積分では積分不可能であるが，ルベーグ積分では 1 である．射影作用素も大切な概念であり，固有空間への分解に用いられる．その根底には内積があって，内積を入れる事によって直交補空間が決まり，射影方向が決まっていくのである．

《参　考　文　献》

(1) 関数解析について
関数解析　千葉克裕　培風館
関数解析　増田久弥　裳華房
積分の世界　志賀浩二　岩波書店
数学基礎講義　日本評論社
数学的構造　栗田稔　啓林館
対話現代数学入門　小針晛宏　講談社
(2) 計量線形空間について
明解線形代数　小寺平治　共立出版
線形代数入門　斉藤正彦　東京大学出版会
線形空間　淡中忠郎　共立出版
線形性　志賀浩二　岩波書店
固有値問題30講　志賀浩二　朝倉書店
教えてほしい数学の疑問 2　日本評論社
大学への新数学IIＢ　中田義之 他　研文書院
(3) 大学入試問題について
大学入試数学のルーツ　小寺平治　現代数学社
大学への数学新数学スタンダード演習　東京出版
全国大学入試問題正解 2002，2003 年用　旺文社
名古屋大学理系前期　教学社
(4) ルベーグ積分について
数学セミナー 2000年 1 月号　日本評論社
関数解析学の基礎・基本　樋口禎一 他　牧野書店
(5) ルジャンドルについて
100 人の数学者　日本評論社
(6) 公理について
数学ビギナーズ・マニュアル　佐藤文広　日本評論社
(7)　フーリエ変換の応用について
数学セミナー　2000 年 5 月号　日本評論社
数学のしくみ　川久保勝夫　日本実業出版社

（埼玉県立浦和高等学校）