四面体でのチェバ・カルノーの条件による共線定理・共点定理と応用について
――メネラウス・チェバを含む定理――

入砂(いりすな)　七五三一(しめいち)

1. はじめに

数研通信 19 号 ('94) で Irisuna の定理 (メネラウス・チェバを含む定理) がどんな定理かを発表してから，22 号 ('95) では第 2 定理からの発展として，線束の定理，27 号 ('96) では第 3 定理・共線定理・共点定理，32 号 ('98) では Irisuna の定理を一般化した連鎖定理を発表した．また，34 号 ('99) ではニュートンの定理の拡張のいくつかを発表した．また，39 号 ('01) では，チェバの定理を正弦比で表して三角形の五心やブリアンションの定理の別証を試みた．さらに，41 号 ('01) では (Irisuna の) 連鎖定理の応用として，デザルグの定理，パップスの定理，パスカルの定理等の証明をした．またその証明を通して，メネラウスの定理やチェバの定理との違いや関連を考察した．

今回は，平面でのこれまでの定理を空間に発展させ，特に四面体での定理にまとめて，大学入試問題の解法に応用する．かくして，メネラウスの定理・チェバの定理の発展教材の研究としたい．

次に定義，Irisuna の定理をあげて準備とする．

2. 定義

以下の考察では，同一直線上の相異なる 3 点 A, B, C に対して，動点 P が A から C を経由し B に到る，という考えがしばしば用いられる．

このとき，

(1) 動点 P に対応する線分の比とは，

$$\sigma(\mathrm{AB})=\sigma(\mathrm{AB},\ \mathrm{C})=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}$$

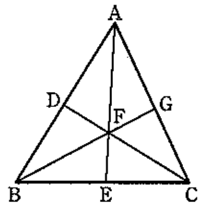
と定め，C を**返り点**と呼ぶ．ここで，

(ア) 点 C が AB の外分点のとき**返り点 1**

(イ) 点 C が AB の内分点のとき**返り点 0**

と呼ぶことにする．

(2) 図の △ABC を ◬ABC(DEG, F) と表す．



(3) $\sigma(\mathrm{A_0A_1A_2\cdots\cdots A}_n)$
$=\sigma(\mathrm{A_0A_1})\sigma(\mathrm{A_1A_2})\cdots\cdots\sigma(\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n)$

(4) R_i^j は返り点 1 を i 個含む j 個の比の積のこととする．(返り点 0 は $j-i$ 個)

例．◬ABC (DEG, F) では，

R_1^3 : $\sigma(\mathrm{ABEA})=\sigma(\mathrm{AB})\sigma(\mathrm{BE})\sigma(\mathrm{EA})$

$$=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1 \quad (\text{メネラウスの定理})$$

R_0^3 : $\sigma(\mathrm{ABCA})=\sigma(\mathrm{AB})\sigma(\mathrm{BC})\sigma(\mathrm{CA})$

$$=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GA}}=1 \quad (\text{チェバの定理})$$

(5) ◬ABC と ◬A′B′C′ が周または内部の線分 ST(U) (U は返り点 0 または 1) を共有しているとき，◬ABC と ◬A′B′C′ は**連鎖線分** ST(U) で連鎖しているといい，

$$◬\mathrm{ABC} \overset{\mathrm{ST(U)}}{\wedge} ◬\mathrm{A'B'C'}$$

と表し，3 点 S, T, U を **連鎖点**と呼ぶことにする．

3. Irisuna の定理

◬ABC (DEG, F) で，点 P は周および内部の線分上を動くものとすると，点 A, B, C, D, E, F, G のどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点 P に対応する線分の比の積は 1 である．(数研通信 19 号，財団法人石田財団〔石田教育賞〕; I. F Report 第 22 号 参照)

次の返り点と共線・共点に関する定理は，証明をするときによく使われ重要である．

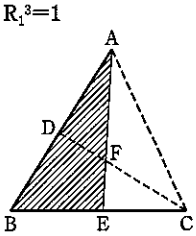
4. $R_i^3=1$ ($i=0$, 1, 2, 3) と共線・共点に関する定理

$R_i^3=1$ ($i=0$, 1, 2, 3) を表す三角形を含む三角形において

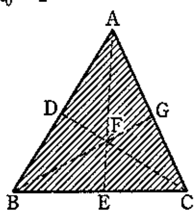
(1) $i=1$, 3 のとき；$R_i^3=1$ ならば，返り点(0 または 1)を表す 3 点(分点)は一直線上にある．(メネラウスの定理の逆)

(2) $i=0$, 2 のとき；$R_i^3=1$ ならば，返り点(0 または 1)を表す点(分点)と三角形の頂点を結ぶ 3 直線は 1 点で交わる．(チェバの定理の逆) (数研通信 27 号 参照)

$R_1^3=1$



$R_0^3=1$

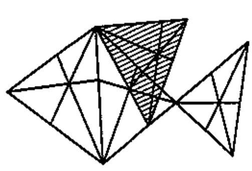


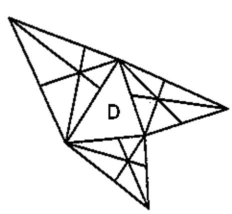
Irisuna の定理を一般化した次の定理によって，従来のメネラウスの定理やチェバの定理とは少し異なるものとなる．

5. 連鎖定理

Irisuna の定理を表す三角形◬が 1 辺(3 点共有)または互いに頂点(1 点共有)で連鎖する図形において，点Pは◬の周および内部の線分上を動くものとすると，動点Pが再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は 1 である．ただし，内部に◬を含まない領域 D がある場合は，この D の外周に対応する線分の比の積は 1 になるものとする．

(数研通信 32 号 参照)

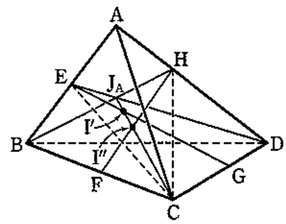




《定義》 3 つ以上の三角形が連鎖するとき，すべての連鎖線分に共通な点があるならば，それを**連鎖共有点**ということにする．明らかに，連鎖共有点があるならば内部に◬を含まない領域はできない；すなわち，連鎖定理が適用できる．

6. チェバ・カルノー (Ceva, Carnot) の条件

【定理】 四面体 ABCD (EFGH) で 2 直線 EG と HF が交わる必要十分条件は $\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ である．



証明) BH, DE の交点を J_A とする．DE, DC の定める平面上に点 J_A, G があるから，J_AC, EG は交わる．この交点を I′ とする．

同様にして，J_AC, HF は交わり，交点 I″ とする．

$$◬\mathrm{EDC}(J_AG,\ I') \overset{\mathrm{ED}(J_A)}{\wedge} ◬\mathrm{BAD}(\mathrm{EH},\ J_A)$$

だから連鎖定理より

$\sigma(J_AC,\ I')=\sigma(J_AB,\ \mathrm{H})\sigma(\mathrm{BA})\sigma(\mathrm{AD})\sigma(\mathrm{DC})$ …… ①

◬$\mathrm{HBC}(J_AF,\ I'')$ で (メネラウスの定理)

$\sigma(J_AC,\ I'')=\sigma(J_AB,\ \mathrm{H})\sigma(\mathrm{BC})$ …… ②

必要条件であることの証明

EG と HF が交わるならば，$I'=I''$ (練習問題 3) だから①，②より

$\sigma(\mathrm{BA})\sigma(\mathrm{AD})\sigma(\mathrm{DC})=\sigma(\mathrm{BC})$ …… ③

変形して

$\sigma(\mathrm{AB})\sigma(\mathrm{BC})\sigma(\mathrm{CD})\sigma(\mathrm{DA})=1$

よって $\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ …… (A)

十分条件であることの証明

逆に，(A)が成り立つとき，変形して③が成り立つから①，②より

$\sigma(J_AC,\ I')=\sigma(J_AC,\ I'')$

よって $I'=I''$ ゆえに EG と HF が交わる．

したがって，$\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ が必要十分条件である． (証明終)

これより，次の共線定理が導かれる．

7. 四面体での (Irisuna の) 共線定理

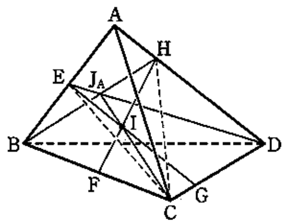
四面体 ABCD (EFGH) で，$\sigma(ABCDA)=1$ のとき，EG と HF の交点 I，BH と ED の交点 J_A とすると，3 点 J_A，I，C は一直線上にある．

証明) チェバ・カルノーの条件の十分条件の証明によると，$\sigma(ABCDA)=1$ ならば $I'=I''$ で，EG と HF は交わるから，その交点を I とすると，3 点 J_A，I，C は一直線上にある．　（証明終）

次に，この共線定理を用いて第 3 定理を証明する．

8. 四面体での (Irisuna の) 第 3 定理

四面体 ABCD (EFGH) で $\sigma(ABCDA)=1$ ならば，EG，HF の交点 I とするとき，動点 P が“返り点” 0 または 1 で四辺形 ABCD の周および内部の線分上を動くものとすると，点 A，B，C，D，E，F，G，H，I のどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点 P に対応する線分の比の積は 1 である．



この定理の証明のため，次の補題を準備する．

《補題》 $R_4{}^4$: $\sigma(ABCDA)=1$ ならば，$\sigma(AEIHA)=1$

証明) BH，ED の交点を J_A とすると，$\sigma(ABCDA)=1$ だから，共線定理から，3 点 J_A，I，C は一直線上にある．

$$⚠DAB(HE,\ J_A)\ \overset{ED(J_A)}{\wedge}\ ⚠EDC(J_AG,\ I)\ \overset{J_AC(I)}{\wedge}$$
$$⚠CBH(FJ_A,\ I)\ \overset{BH(J_A)}{\wedge}\ ⚠DAB$$

よって，連鎖定理 (J_A は連鎖共有点) から

$\sigma(HAE)\{\sigma(EI,\ G)\}\{\sigma(IH,\ F)\}=1$

ゆえに　$\sigma(HAEIH)=1$

したがって　$\sigma(AEIHA)=1$　（証明終）

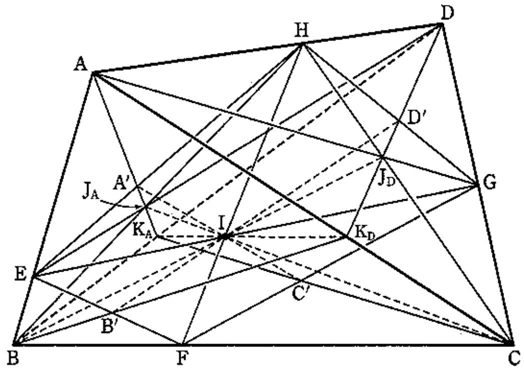
(証明略) (平面のときと同様になる)

次に，共線定理，第 3 定理を用いて共点定理を証明する．

9. 四面体での (Irisuna の) の共点定理

四面体 ABCD (EFGH) で $\sigma(ABCDA)=1$ とする．HF と EG の交点を I，ED と BH の交点を J_A とする．直線 AJ_A と EH，BD の交点を A′，K_A とする．同様に AG と HC の交点を J_D，直線 DJ_D と HG，AC の交点を D′，K_D とする．また，BK_D と EF の交点を B′，CK_A と FG の交点を C′ とする．

このとき，5 直線 J_AC，J_DB，K_AK_D，A′C′，B′D′ は 1 点 I で交わる．



証明) $\sigma(ABCDA)=1$ だからチェバ・カルノーの条件より，HF と EG は交わり，交点 I である．

また，(Irisuna の) 共線定理より，3 点 J_A，I，C；J_D，I，B はそれぞれ一直線上にある．

よって，J_AC，J_DB は 1 点 I で交わる．…… (A)

次に，K_AK_D が点 I を通ることを証明する．つまり，$\triangle K_AAC$ で返り点 K_D，I，K_A として $R_1{}^3=1$ を証明すればよい．(A)を用いると，

$$⚠ADC(HGK_D,\ J_D)\ \overset{HC(J_D)}{\wedge}\ ⚠HCB(J_DFJ_A,\ I)$$
$$\overset{BH(J_A)}{\wedge}\ ⚠BAD(EHK_A,\ J_A)\ \overset{AD(H)}{\wedge}\ ⚠ADC$$

よって，連鎖定理 (H が連鎖共有点) から

$R_1{}^3$: $\sigma(ACJ_AA,\ K_DIK_A)$
$=\sigma(AC)\sigma(CJ_A)\sigma(J_AA)=1$

ゆえに，$R_1{}^3=1$ より K_AK_D は点 I を通る．
（メネラウスの定理の逆）…… (B)

次に，A′C′ が点 I を通ることを証明する．四辺形 EHFG (A′IC′I) で，$R_0{}^4=1$ を証明すれば四辺形でのメネラウスの定理の逆より証明される．(練習問題 1)

すなわち

$R_0{}^4$: σ(EHFGE)

$=\sigma(\mathrm{EH})\sigma(\mathrm{HF})\sigma(\mathrm{FG})\sigma(\mathrm{GE})$

$\sigma(\mathrm{ABDA})=1$, $\sigma(\mathrm{CBDC})=1$ だから

$R_2{}^3=1$ (チェバの定理) より

$=\sigma(\mathrm{EA})\sigma(\mathrm{AH})\sigma(\mathrm{HF})$

$\times\sigma(\mathrm{FC})\sigma(\mathrm{CG})\sigma(\mathrm{GE})$

$=\sigma(\mathrm{EAHFCGE})$

(Irisuna の) 第 3 定理より

$=1$

よって, $R_0{}^4=1$ が成り立ち, A′C′ が点 I を通る.

同様にして, B′D′ は点 I を通る. …… (C)

したがって, (A), (B), (C)より

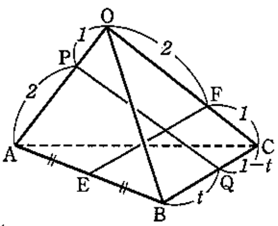
5 直線 J_AC, J_DB, K_AK_D, A′C′, B′D′ は 1 点 I で交わる. (証明終)

10. 応用 (大学入試問題を解く)

(1) チェバ・カルノーの条件による解法

> [問題] 四面体 OABC において, 辺 AB の中点を E, 辺 OC を 2 : 1 に内分する点を F, 辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P とする.
> また, Q を $\overrightarrow{BQ}=t\overrightarrow{BC}$ を満たす辺 BC 上の点とする. PQ と EF が交わるとき, 実数 t の値を求めよ. (岡山大)

解) PQ と EF が交わるから, チェバ・カルノーの条件より



$\sigma(\mathrm{OABCO})=1$

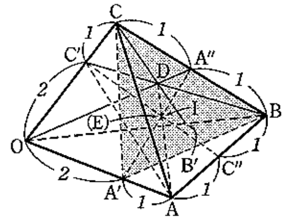
$\therefore\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{t}{1-t}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

$\therefore\ \dfrac{t}{1-t}=4$ から $t=\dfrac{4}{5}$ …… (答)

(2) (Irisuna の) 共線定理・共点定理・第 3 定理による解法

> [問題 1] 四面体 OABC を考え,
> $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とする.
> また, 線分 OA, OB, OC を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ A′, B′, C′ とし, 直線 BC′ と直線 B′C の交点を D, 3 点 A′, B, C を通る平面と直線 AD との交点を E とする.
> (1) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ で表せ.
> (2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ. (札幌医大)

解) (1) ⚠BOC(B′C′, D) で, (メネラウスの定理)



$\sigma(\mathrm{CB'},\ \mathrm{D})=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{1}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{OD}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

$=\dfrac{2}{5}(\vec{b}+\vec{c})$ …… (答)

(2) AB, BC の中点をそれぞれ C″, A″ とすると,

$\sigma(\mathrm{OABCO})=1$

∴ チェバ・カルノーの条件より, A′A″ と C′C″ は交わり, 交点 I とする.

$\sigma(\mathrm{COBC})=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{1}=1$ だから

⚠OBC(B′A″C′, D), (チェバの定理の逆) が成り立つ.

よって, (Irisuna の) 共線定理より

DA は I を通る.

ここで, I は A′A″ 上だから平面 A′BC 上にある.

よって, I=E である.

次に, σ(DA, E) を求める. (1)より

$\sigma(\mathrm{DC},\ \mathrm{B'})=\dfrac{2}{5}$ …… ①

また

⚠OBC(B′A″C′, D) $\overset{\mathrm{C'B(D)}}{\wedge}$ ⚠ABC′(C″D, E)

よって, 連鎖定理から

$\sigma(\mathrm{DA},\ \mathrm{E})=\sigma(\mathrm{DC})\sigma(\mathrm{CB})\sigma(\mathrm{BA})$

①より

$=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{5}$

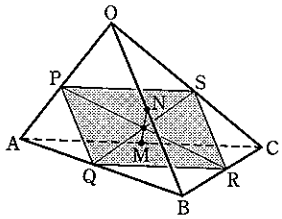
よって, DE : EA=2 : 5

したがって,

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{OD}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{OA}=\dfrac{2}{7}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

(∵ (1)より) …… (答)

> [問題 2] 四面体 OABC の辺 OA 上に点 P, 辺 AB 上に点 Q, 辺 BC 上に点 R, 辺 CO 上に点 S をとる. これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき, この平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線の交点は 2 つの線分 AC と OB のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ. (京大)



解） AC, BO の中点をそれぞれ M, N とする．…… ①

平行四辺形 PQRS だから，PR と QS は交わり，交点 I とする．

よって，チェバ・カルノーの条件より

$$\sigma(\mathrm{OABCO})=1 \quad \cdots\cdots ②$$

∴ (Irisuna の) 第 3 定理が成り立つから

$\sigma(\mathrm{OPISO})=1$

∴ $\sigma(\mathrm{OP},\ \mathrm{A})$

$=\sigma(\mathrm{OS},\ \mathrm{C})\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}$

$=\sigma(\mathrm{OS},\ \mathrm{C})$

∴ $\sigma(\mathrm{OA},\ \mathrm{P})=\sigma(\mathrm{OC},\ \mathrm{S})$

これと，①より　M は中点だから

$$\sigma(\mathrm{OACO})=1$$

つまり

$$\triangle\mathrm{OAC(PMS)} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．（チェバの定理の逆）

同様にして，

$$\sigma(\mathrm{CS},\ \mathrm{O})=\sigma(\mathrm{CR},\ \mathrm{B})$$

$$\therefore\quad \sigma(\mathrm{CO},\ \mathrm{S})=\sigma(\mathrm{CB},\ \mathrm{R})$$

これと N は中点だから，

$$\triangle\mathrm{OBC(NRS)} \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

したがって，②，③，④より

(Irisuna の) 共点定理が成り立つから，

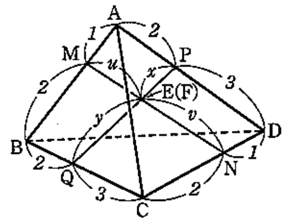
PR, QS, MN は 1 点 I で交わる．

つまり，対角線 PR, QS の交点は中点を結ぶ線分 MN 上にある．　　　　　　　　　　　　（証明終）

注） PS∥AC∥QR, SR∥OB∥PQ を用いても証明される．

［問題 3］ 四面体 ABCD において，辺 AB, DC を 1：2 の比に内分する点をそれぞれ M, N とし，辺 AD, BC を 2：3 の比に内分する点をそれぞれ P, Q とする．

線分 MN を $u：v$ の比に内分する点を E, 線分 PQ を $x：y$ の比に内分する点を F としたとき，2 点 E, F が一致するような比 $u：v$ および $x：y$ を求めよ．ただし，u, v, x, y は正とする．　　　　　　　　　　（改 神戸大）



解） $\sigma(\mathrm{ABCDA})$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=1$

だから，

チェバ・カルノーの条件より PQ, MN は交わり (Irisuna の) 第 3 定理が成り立つから，

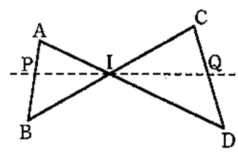
$$\sigma(\mathrm{MN})=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$$

よって，$u：v=2：3$ …… (答)

$$\sigma(\mathrm{PQ})=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，$x：y=1：2$ …… (答)

11. 練習問題



［問題 1］ 四辺形 ABCD (PIQI) で，3 点 P, I, Q が一直線上になる条件は $\sigma(\mathrm{ABCDA})=1$ であることを証明せよ．

［問題 2］ (2001 年センター試験より)

四面体 OLMN (PSQR) で，OP：PL＝2：1，LS：SM＝b：(1－b)，MN の中点 Q，OR：RN＝a：(1－a) とする．このとき点 S が 3 点 P, Q, R の定める平面上にあるとき，a と b の関係式は (　　　　　)＝0 である．

［問題 3］ チェバ・カルノーの条件の証明で EG と HF が交わるならば，I′＝I″ が成り立つことを背理法で示せ．

《参 考 資 料》

1) 入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”他，数研通信 19, 22, 27, 32, 34, 39, 41 号，数研出版 ('94～'01)

2) ：Irisuna の定理（メネラウスの定理・チェバの定理を含む)，(石田教育賞)，I. F. Report 第 22 号，財団法人石田財団 ('95)

3) ：Irisuna の定理と線束の第 3 定理（Menelaos の定理・Ceva の定理を含む)，イプシロン，愛知教育大学数学教育学会誌第 37 巻 ('95)

(愛知県立一宮西高等学校)