複素フィボナッチ数列

えんどう　かずなり
遠藤　一成

1 はじめに

2001年度東京大学理科系の第4問

> 複素数平面上の点 a_1, a_2, ……, a_n, …… を
> $$\begin{cases} a_1=1, \ a_2=i \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$
> により定め
> $$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$
> とおく．ただし，i は虚数単位である．
> (1) 3点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ．
> (2) すべての点 b_n ($n=1$, 2, ……) は円 C の周上にあることを示せ．

により定義される数列 $\{a_n\}$ はフィボナッチ数列とよく似た性質をもつので，以下複素フィボナッチ数列と呼ぶことにする．

本稿では，以下2つのことを目的とする．

(1) フィボナッチ数列に対して成立する公式を利用して，複素フィボナッチ数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の挙動を調べること．

(2) 数列 $\{b_n\}$ が1つの円周上に存在するための十分条件を求めること．

2 フィボナッチ数列

フィボナッチ数列は
$$\begin{cases} f_1=1, \ f_2=0, \\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$
によって定まり，黄金分割や自然現象とも関連が深いことはよく知られている．

そして，次の定理が成立する．

> **定理1** (1) $f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$
> (2) $f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+2}=(-1)^n$
> (3) $f_{2n-1}=f_n{}^2+f_{n+1}{}^2$
> $f_{2n}=f_nf_{n+1}+f_{n+1}f_{n+2}$
> (4) $\left\{\dfrac{f_{2n}}{f_{2n-1}}\right\}$ は単調増加で，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する

(1)の証明　特性方程式 $x^2-x-1=0$ の解は
$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
で，$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$ である．このことから
$$f_{n+2}-\alpha f_{n+1}=\beta(f_{n+1}-\alpha f_n)$$
よって
$$f_{n+1}-\alpha f_n=\beta^{n-1}(f_2-\alpha f_1)=-\alpha\beta^{n-1}$$
同様に
$$f_{n+1}-\beta f_n=-\beta\alpha^{n-1}$$
2式を掛けて
$$(f_{n+1}-\alpha f_n)(f_{n+1}-\beta f_n)=(\alpha\beta)^n$$
$$f_{n+1}{}^2-(\alpha+\beta)f_nf_{n+1}+\alpha\beta f_n{}^2=(-1)^n$$
よって
$$f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+1}-f_n{}^2=(-1)^n$$

(2)の証明　(1)より
$$f_{n+1}{}^2-f_n(f_{n+1}+f_n)=(-1)^n$$
したがって
$$f_{n+1}{}^2-f_nf_{n+2}=(-1)^n$$

(3)の証明　n についての数学的帰納法で証明する．

$n=1$ の場合
$$\text{右辺}=f_1{}^2+f_2{}^2=1+0=1=f_1=\text{左辺}$$
また
$$\text{右辺}=f_1f_2+f_2f_3=0+0=0=f_2=\text{左辺}$$
$n=k$ の場合
$$f_{2k-1}=f_k{}^2+f_{k+1}{}^2$$
$$f_{2k}=f_kf_{k+1}+f_{k+1}f_{k+2}$$
が成立することを仮定する．

よって

$$f_{2k+1}=f_{2k-1}+f_{2k}$$
$$=f_k{}^2+f_{k+1}{}^2+f_kf_{k+1}+f_{k+1}f_{k+2}$$
$$=f_{k+1}{}^2+f_k(f_k+f_{k+1})+f_{k+1}f_{k+2}$$
$$=f_{k+1}{}^2+f_kf_{k+2}+f_{k+1}f_{k+2}$$
$$=f_{k+1}{}^2+f_{k+2}(f_k+f_{k+1})$$
$$=f_{k+1}{}^2+f_{k+2}{}^2$$

また

$$f_{2k+2}=f_{2k}+f_{2k+1}$$
$$=f_kf_{k+1}+f_{k+1}f_{k+2}+f_{k+1}{}^2+f_{k+2}{}^2$$
$$=f_{k+1}(f_k+f_{k+1})+f_{k+2}(f_{k+1}+f_{k+2})$$
$$=f_{k+1}f_{k+2}+f_{k+2}f_{k+3}$$

すなわち，(3)は $n=k+1$ の場合にも成り立つ．

(4)の証明

$$\frac{f_{2n+2}}{f_{2n+1}}-\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}=\frac{f_{2n+2}f_{2n-1}-f_{2n}f_{2n+1}}{f_{2n+1}f_{2n-1}}$$
$$=\frac{f_{2n-1}(f_{2n+1}+f_{2n})-f_{2n}(f_{2n}+f_{2n-1})}{f_{2n+1}f_{2n-1}}$$
$$=\frac{f_{2n-1}f_{2n+1}-f_{2n}{}^2}{f_{2n-1}f_{2n+1}}$$

(2)より

$$=\frac{-(-1)^{2n-1}}{f_{2n-1}f_{2n+1}}>0$$

よって，単調増加である．また，$\dfrac{f_{2n}}{f_{2n-1}}\leqq 2$ なので $\left\{\dfrac{f_{2n}}{f_{2n-1}}\right\}$ は有界単調数列となり収束する．その極限値を p とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}=p$ である．

$$\frac{f_{2n+2}}{f_{2n+1}}=1+\frac{f_{2n}}{f_{2n+1}}=1+\frac{1}{\dfrac{f_{2n}+f_{2n-1}}{f_{2n}}}=1+\frac{1}{1+\dfrac{f_{2n-1}}{f_{2n}}}$$

$n\to\infty$ のとき　$p=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{p}}$

つまり　$p^2-p-1=0$

$p>0$ より

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

注意　$\{f_n\}$ は $f_3=1$，$f_4=1$，$f_5=2$，…… となり，f_3 より，いわゆるフィボナッチ数が出る．

③ 複素フィボナッチ数列

東京大第4問中の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はフィボナッチ数列 $\{f_n\}$ を用いて以下のように表すことができる．

> **定理2**　(1)　$a_n=f_n+f_{n+1}i$
>
> (2)　$b_n=\dfrac{f_{2n}+(-1)^{n+1}i}{f_{2n-1}}$

(1)は明らか．

(2)の証明

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{f_{n+1}+f_{n+2}i}{f_n+f_{n+1}i}\times\frac{f_n-f_{n+1}i}{f_n-f_{n+1}i}$$
$$=\frac{f_nf_{n+1}+f_{n+1}f_{n+2}+(f_nf_{n+2}-f_{n+1}{}^2)i}{f_n{}^2+f_{n+1}{}^2}$$

定理1(2)(3)より

$$b_n=\frac{f_{2n}-(-1)^ni}{f_{2n-1}}$$

複素フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ は，複素数平面上の点の集合と考えるとき，それぞれ次の性質をもつ．

> **性質3**　(1)　数列 $\{a_n\}$ は
>
> 双曲線 $y^2-xy-x^2=\pm1$ 上の点列であり，
>
> $n\to\infty$ のとき，無限遠点に近づく．(図1)
>
> (2)　数列 $\{b_n\}$ は円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{5}{4}$ 上の点列であり，$n\to\infty$ のとき，点 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する．(図2)

(1)の証明　$f_n=x$，$f_{n+1}=y$ とおくと

$$a_n=f_n+f_{n+1}i=x+yi$$

であり，定理1(1)より

$$y^2-xy-x^2=\pm1$$

である．よって，この双曲線上に数列 $\{a_n\}$ は存在する．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n=\infty$ より，複素数列 $\{a_n\}$ が無限遠点に近づく．

(2)の証明　定理2(2)より

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|^2=\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{f_{2n-1}{}^2}$$
$$=\frac{f_{2n}{}^2-f_{2n}f_{2n-1}+1}{f_{2n-1}{}^2}+\frac{1}{4}$$

定理 1(1)より

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{(-1)^{2n-1}+f_{2n-1}{}^2+1}{f_{2n-1}{}^2}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{5}{4}$$

また，定理 1(4)より

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{2n}+(-1)^{n+1}i}{f_{2n-1}}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+0\cdot i$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

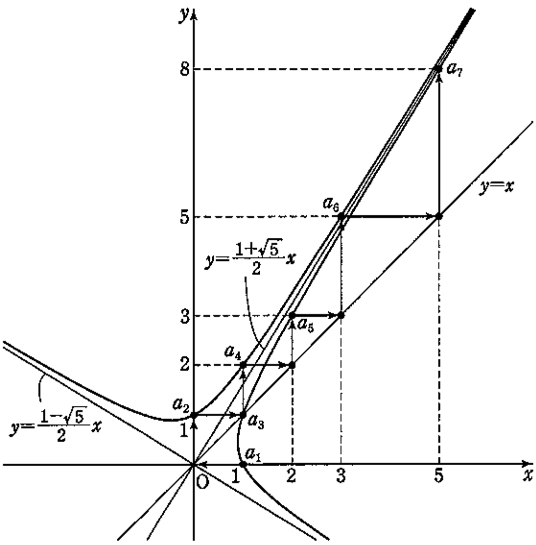

図 1

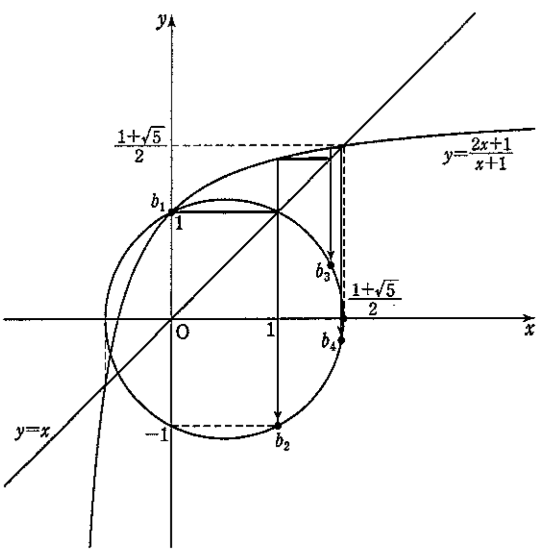

図 2

4 一般化

東京大第 4 問の数列 $\{b_n\}$ が同一円周上に存在するための複素フィボナッチ数列の初期条件をゆるめよう．

> **性質 4**　数列 $\{a_n\}$ が，$\arg\dfrac{a_2}{a_1}=\pm 90°$，
>
> $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を満たすとき，
>
> $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ により定まる点列 $\{b_n\}$ は，複素数平面上で，円 $\left|z-\dfrac{1}{2}-ai\right|^2=a^2+\dfrac{5}{4}$ 上に存在し，点 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する．
>
> ここで，$a=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{a_1}{a_2}\right)$ である．

証明　$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+1$ より

$$\left|b_{n+1}-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\left(a^2+\frac{5}{4}\right)$$

$$=\left|\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}-ai\right|^2-\left(a^2+\frac{5}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{|b_n{}^2|}+\frac{1-2ai}{2\overline{b_n}}+\frac{1+2ai}{2b_n}+\frac{1}{4}+a^2-\left(a^2+\frac{5}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{|b_n|^2}\left\{|b_n|^2-b_n\left(\frac{1}{2}-ai\right)-\overline{b_n}\left(\frac{1}{2}+ai\right)-1\right\}$$

$$=-\frac{1}{|b_n|^2}\left\{\left|b_n-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2\right\}$$

なので，$\left|b_1-\dfrac{1}{2}-ai\right|^2-\dfrac{5}{4}-a^2=0$ を証明すればよい．

$\arg\dfrac{a_2}{a_1}=\pm 90°$ より，$a_1=wp$，$a_2=wqi$，(p，q は実数) とおくことができる．

このとき，

$$a=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{wqi}{wp}+\frac{wp}{wqi}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-\frac{p}{q}\right)$$

$$b_1=\frac{wqi}{wp}=\frac{qi}{p}$$

となる．したがって

$$\left|b_1-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2=\left|\frac{q}{p}i-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2$$

$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{q}{p}-a\right)^2-\frac{5}{4}-a^2=\left(\frac{q}{p}\right)^2-2a\frac{q}{p}-1$$

$$=\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}-\frac{p}{q}\right)\times\frac{q}{p}-1$$

$$=0$$

また，定理 1 (1)の証明の α，β を用いると

$$a_n=\frac{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)}{\beta-\alpha}$$

よって，

$$b_n=\frac{\beta^{n}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n}(a_2-\beta a_1)}{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\alpha(a_2-\alpha a_1)-\alpha(a_2-\beta a_1)}{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-(a_2-\beta a_1)}$$

$0<\dfrac{\beta}{\alpha}<1$ なので

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{-\alpha(a_2-\beta a_1)}{-(a_2-\beta a_1)}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

注意　東京大第 4 問は，$w=p=q=1$，よって，$a=0$ の場合である．

（元 愛知県滝高等学校）