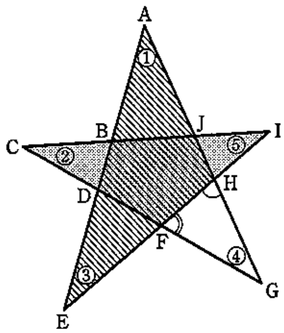
星型 *m* 点飛び *n* 角形の頂角の和について

大野(おおの)　栄一(えいいち)

よく下図のような星型五角形で各頂角①～⑤の和を求めよという問題に出会います.



よくある解答は1つの三角形に①～⑤の5つの角を押し込めてしまう方法です.

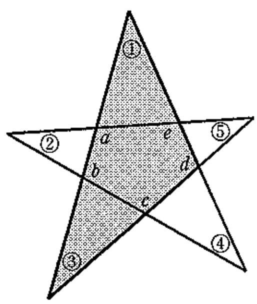
△AEH で　①＋③＝∠H の外角

△CFI　で　②＋⑤＝∠F の外角

①～⑤が △FGH の3角に集まって，①～⑤の和が 180° というものである.

まずは他の解を紹介しましょう.

1.



それぞれの三角形に素直に注目して

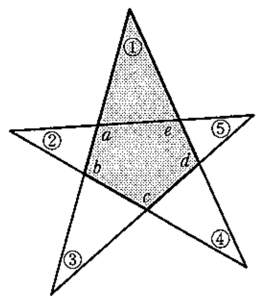
$$\begin{cases} ①+③+d=180^\circ \\ ②+④+e=180^\circ \\ ③+⑤+a=180^\circ \\ ④+①+b=180^\circ \\ ⑤+②+c=180^\circ \end{cases}$$

辺々加えて

$2(①\sim⑤)+(a\sim e)=180^\circ\times5$

$(a\sim e)=180^\circ\times3$ なので

$(①\sim⑤)=180^\circ$



同様にそれぞれの四角形に注目すると

$$\begin{cases} ①+b+c+d=180^\circ\times2 \\ ②+c+d+e=180^\circ\times2 \\ ③+a+d+e=180^\circ\times2 \\ ④+a+b+e=180^\circ\times2 \\ ⑤+a+b+c=180^\circ\times2 \end{cases}$$

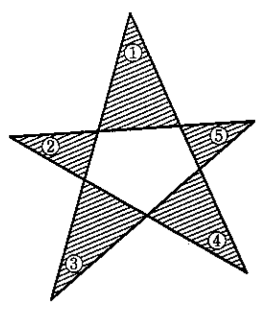
辺々加えて

$(①\sim⑤)+3(a\sim e)=180^\circ\times10$

$(a\sim e)=180^\circ\times3$ なので

$(①\sim⑤)=180^\circ$

2.



中にできる五角形の外角の和に注目します.

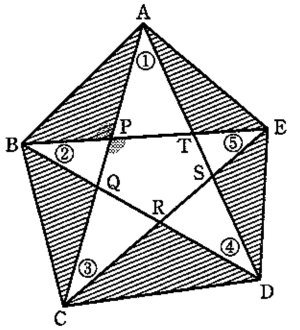
（5つの斜線部の三角形の内角の和）

－2(五角形の外角の和)

と考えて

$180^\circ\times5-2\times360^\circ=180^\circ$

3.



今度は1.のときのように五角形の内角の和に注目します.

(大五角形 ABCDE の内角の和)

−(5つの斜線三角形の内角の和)

+(小五角形 PQRST の内角の和)

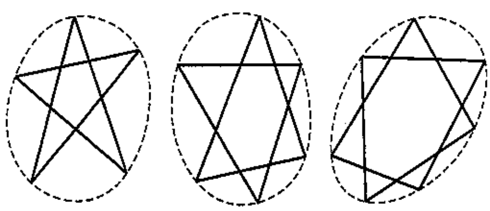
と考えて

$180^\circ\times3-180^\circ\times5+180^\circ\times3=180^\circ$

他にもいろいろな手がありますが，このへんにしておいて次はこの問題を拡張してみます.

いまの星型五角形はループ状の凸閉曲線の周上に(異なる) 5つの点を取り，1つ飛ばしに結んでいったときにできる図形です.

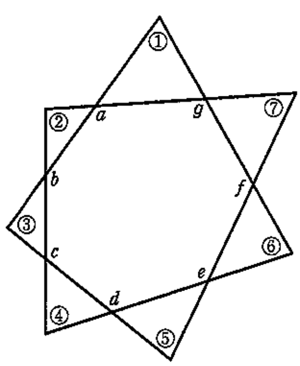
次は7点を取り星型七角形を作ってみます.



5点　　6点　　7点

(6点だと2つの三角形に分割してしまい，頂角の和を考える問題としては面白くないので奇数点を考えることにする.)

先程の1.2.3.と同じ方法で解くことができます.



1.の方法では

四角形に注目すると

①+③+⑤+f=180°×2

五角形に注目すると

①+③+d+e+f=180°×3

六角形に注目すると

①+b+c+d+e+f=180°×4

と考えることができます.

2.の方法では　$180^\circ\times7-2\times360^\circ$

3.の方法では　$180^\circ\times5-180^\circ\times7+180^\circ\times5$

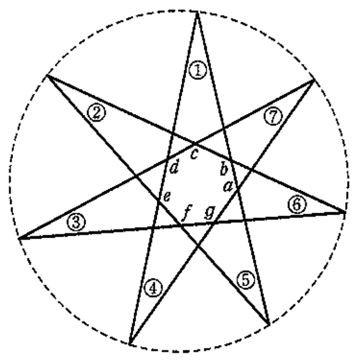
いずれも(①〜⑦)=180°×3 となります.

一般化は容易で，ここでは1点飛ばしに結んでいったので星型1点飛び n 角形 (星型 (1, n) 角形) 頂角の和と呼ぶことにします. n は5以上の整数としておき，3.の方法で考えると

$2\times180^\circ(n-2)-180^\circ n=180^\circ(n-4)\qquad(n\geqq5)$

となります.

次なる拡張は2点飛び，3点飛び，……ということになります. 星型2点飛び五角形は星型1点飛び五角形と同等なので，星型 (2, 7) 角形頂角の和から考えてみます.

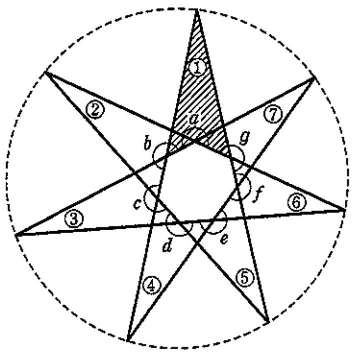


先程の1.の方法が使えて，各三角形に注目してみると

①+④+a=180°
②+⑤+b=180°
③+⑥+c=180°
④+⑦+d=180°
⑤+①+e=180°
⑥+②+f=180°
⑦+③+g=180°

辺々加えて　2(①〜⑦)+(a〜g)=180°×7

(a〜g)=180°×5 なので　(①〜⑦)=180°



2.の方法はすんなりとは使えません．そこで三角形の代わりに斜線部のような四角形を7つ考えます．

すると

（7つの斜線部の四角形の内角の和）

−2(七角形の外角の和)−(a〜g)

となります．

(a〜g)は(七角形の各外角＋180°) の和　なので

（7つの斜線部の四角形の内角の和）

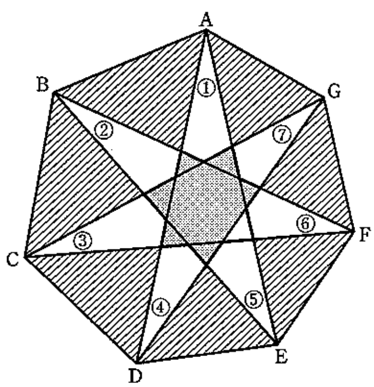
−3(七角形の外角の和)−180°×7

と考えることができ

$180°\times2\times7-3\times360°-180°\times7=180°$

となります．

3.の方法では



(大七角形 ABCDEFG の内角の和)

−（7個の斜線部三角形の内角の和）

＋(星型 (1, 7) 角形頂角の和)

と考えて

$180°\times5-180°\times7+180°\times3=180°$

一般化して，星型 (2, n) 角形の頂角の和として3.の方法で考えると

$180°(n-2)-180°n+180°(n-4)$

$=\underline{180°(n-6)}$　　($n\geqq7$)

となります．

同様にして

星型 (3, n) 角形頂角の和は

$180°(n-8)$　($n\geqq9$)

星型 (4, n) 角形頂角の和は

$180°(n-10)$　($n\geqq11$)

となります．

ここまでくれば一般に星型 (m, n) 角形の頂角の和は

((n 角形の内角の和)−n(三角形の内角の和)

＋(星型 ($m-1$, n) 角形頂角の和)＝)

$180°\{n-2(m+1)\}$

($n>2(m+1)$, $m\geqq1$, n, m は整数)

と予想できます．いままでの所では n は奇数と考えています．n を固定して数学的帰納法で証明しておきます．

$m=1$, 2 は，すでに示しました．

$m=k$ のとき，つまり星型 (k, n) 角形の頂角の和を

$180°\{n-2(k+1)\}$

とすると，星型 ($k+1$, n) 角形の頂角の和は

$180°(n-2)-180°n+180°\{n-2(k+1)\}$

$=180°\{n-2(k+2)\}$

となるので，一般に成立します．

よく，星型図形を見ただけで頂角の和を 180° としてしまうことがありますが 180° になるのは

$n-2(m+1)=1$ となる特殊な場合

(m, n)＝(1, 5), (2, 7), (3, 9), …… だけです．(特に $m=0$ とすると三角形となります)

n を奇数としたこともあって，ここまでの例ではすべて一筆書き可能な星型 (m, n) 角形でしたが，一般にはそうとは限りません．

$m=1$ の場合は問題なく一筆書きで全点を通りますが $m\geqq2$ の場合は，そうとは限りません．

例えば星型 (2, 15) 角形ではループ上の凸閉曲線上の各点に 1, 2, ……, 15 と番号をつけると

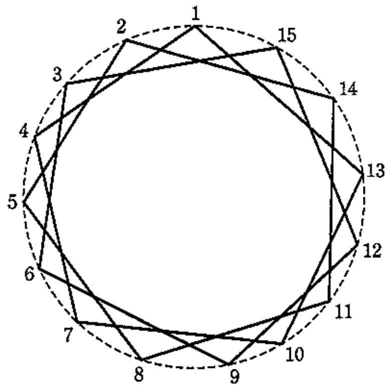
$1\equiv4\equiv7\equiv10\equiv13 \pmod 3$

$2\equiv5\equiv8\equiv11\equiv14 \pmod 3$

$3\equiv6\equiv9\equiv12\equiv15 \pmod 3$

と3つのグループに分かれます．

頂角の和は先程の1.2.3.の方法でも可能ですが独立した五角形が3つできるので $(180°\times3)\times3$ で求まります．



次にnが偶数の場合を考えておきます．

星型(1，n)角形の場合，各頂点に1，2，3，……，$n(=2m)$ と番号をつけると

$$1\equiv 3\equiv\cdots\cdots\equiv 2m-1 \pmod 2$$

$$2\equiv 4\equiv\cdots\cdots\equiv 2m \pmod 2$$

と2つのグループに分かれるので，独立した$\frac{n}{2}$角形が2つできて

$$180°\left(\frac{n}{2}-2\right)\times 2=180°(n-4) \qquad (n\geqq 6)$$

これは奇数点の場合と同じです．

もちろん先程の1.2.3.の方法で考えることもできます．

2点飛び，3点飛びの場合も同様です．

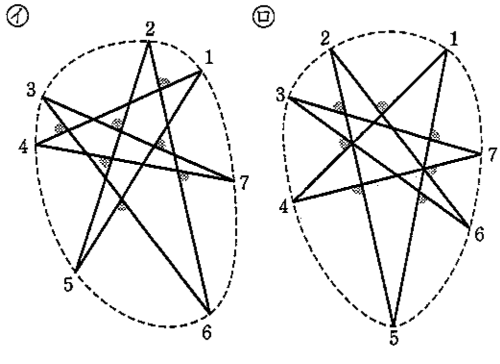
つまり，奇数点，偶数点にかかわらず，一般に星型(m，n)角形の頂角の和は

$$180°\{n-2(m+1)\}$$

$$(n>2(m+1),\ m\geqq 1,\ m,\ n\text{ は整数})$$

となります．

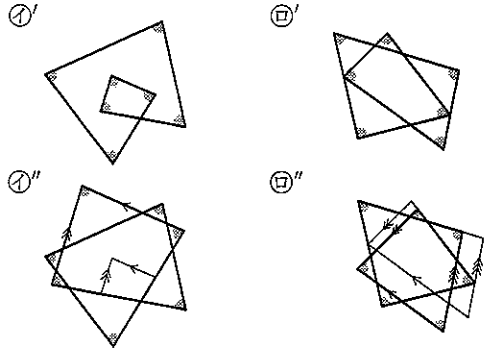
また，お気づきかと思いますが，n個の点の取り方によっては，きれいな星型図形にならない場合もあります．



㋑㋺どちらの場合も3.の方法で考えることにします．ここでは，2頂点p，qをつなぐ線分を(p，q)と表すとして

(1，4)と(2，6)，(2，5)と(3，7)，
(3，6)と(4，1)，(4，7)と(5，2)，
(5，1)と(6，3)，(6，2)と(7，4)，
(7，3)と(1，5)

のなす角に注目してその和を求めることになります．



いろいろな求め方がありますが，ここでは㋑㋺から先程の中にできた星型(1，7)角形に相等する図形㋑′㋺′を考え，不角変形で㋑″㋺″へと変形し頂角の和としては星型(1，7)角形と同値であることが確認できます．

これで星型(m，n)角形の頂角の和については解決しました．あと，飛び点の個数が一定でない場合について考えるのも面白いと思います．その飛び点の個数の数列を$\{a_n\}$とでもすれば，星型(a_m，n)角形の頂角の和ということになります．

(大阪府大谷中・高等学校)