対数の底変換公式の裏技について $\log_a b=\log_{a^2} b^2$

塩見(しおみ) 浩三(こうぞう)

数学IIの対数関数の定着度が10数年前から急に悪くなってきた．コンピューターと計算機の普及に反比例して，対数関数の内容も指導する時間数も減少してきたのが原因であろう．

1591年にはガリレイ（伊）がピサの斜塔で落体の実験をし，1601年にはケプラー（独）が惑星運動についての第1・第2法則を発見した．歴史の必然性から，複雑な数の計算をたやすくする対数を，ジョン‐ネーピア（英 1550～1617）が発明したのは1614年のことであった．

なお小数点「・」を用いたのもネーピアが最初である．

対数の発見は天文学者の寿命を10倍に伸ばしたという話をよく聞いたものだ．

歴史的にも，1614年頃から1975年頃までの長きに渡って，対数は数学の主要な地位を占めていたと思われるが，第2次世界大戦後の電算機の発展に伴い，対数計算が実用面から姿を消しつつあり，対数の必要性も軽くなってきた．

しかし対数発見の意義は，今後も数学教育で強調されなければならないし，その応用，特に数学IIIの微分積分計算の理解のためにも大切であることに変わりはない．

対数の性質の底変換公式を利用する，式の値，対数方程式，対数不等式などについて，20数年前から私が指導してきた裏技を，例を中心に説明する．

対数の性質

$$\log_a b \iff \log_{a^2} b^2$$

証明　（底変換の公式）

$$左=\log_a b=\frac{\log b}{\log a}=\frac{2\log b}{2\log a}$$

$$=\frac{\log b^2}{\log a^2}=\log_{a^2} b^2=右$$

$$右=\log_{a^2} b^2=\frac{\log b^2}{\log a^2}=\frac{2\log b}{2\log a}$$

$$=\frac{\log b}{\log a}=\log_a b=左$$

この性質を公式として使用すれば，底変換公式を使うよりも，計算が早く，しかも計算ミスのないことを示そう．

（例1）

(1)　$\log_2 3+\log_4 9=\log_2 3+\log_2 3=2\log_2 3$

(2)　$\log_3 4+\log_9 2=\log_3 4+\log_3\sqrt{2}=\log_3 4\sqrt{2}$

（例2）

(1)　$\log_2(x+1)=\log_4(1-3x)$ を解け．

(2)　$\log_2\sqrt{x+6}+\log_4 x=2$ を解け．

(1)　真数正より　$x+1>0$，$1-3x>0$

よって　$-1<x<\frac{1}{3}$　…… ①

$\log_2(x+1)=\log_{2^2}(x+1)^2=\log_4(x+1)^2$ より

$\log_4(x+1)^2=\log_4(1-3x)$

$(x+1)^2=1-3x$

$x^2+5x=0$　　∴　$x=0,\ -5$

①より　$x=0$　答

($\log_4(1-3x)=\log_2\sqrt{1-3x}$ とはしないこと)

(2)　真数正より　$x+6>0$，$x>0$

よって　$x>0$　…… ①

$\log_2\sqrt{x+6}=\log_{2^2}(x+6)=\log_4(x+6)$ より

$\log_4(x+6)+\log_4 x=2$

$\log_4 x(x+6)=2$

$x^2+6x-16=0$

$(x-2)(x+8)=0$　　∴　$x=2,\ -8$

①より　$x=2$　答

($\sqrt{\ }$ がなくなるように底を考える)

（例３）
$\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+10x-16)>\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ を解け．

（一般解）

真数正より　$-x^2+10x-16>0$　…… ①

$x-2>0$　…… ②

①から　$x^2-10x+16<0$

すなわち　$(x-2)(x-8)<0$　∴　$2<x<8$

よって，①かつ②より　$2<x<8$　…… ③

与えられた不等式の対数の底を２にそろえて

$$\frac{\log_2(-x^2+10x-16)}{\log_2\frac{1}{4}}>\frac{\log_2(x-2)}{\log_2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\log_2(-x^2+10x-16)}{-2}>\frac{\log_2(x-2)}{-1}$$

両辺に -2 をかけて

$\log_2(-x^2+10x-16)<2\log_2(x-2)$

$\log_2(-x^2+10x-16)<\log_2(x-2)^2$

∴　$-x^2+10x-16<(x-2)^2$　…… (＊)

整理すると　$x^2-7x+10>0$

すなわち　$(x-2)(x-5)>0$

∴　$x<2,\ 5<x$　…… ④

③かつ④より　$5<x<8$　答

（別解数楽）

（真数条件は上に同じ）

底を $\frac{1}{4}$ に統一

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{4}}(x-2)^2$ ⟵ $\log_a b=\log_{a^2}b^2$

$\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+10x-16)>\log_{\frac{1}{4}}(x-2)^2$

底 $\frac{1}{4}$ は $0<\frac{1}{4}<1$ より

$-x^2+10x-16<(x-2)^2$　…… (＊)

（以下同じ）

（例４）
$\log_2 x(x-5)-\log_{\sqrt{2}}(x-5)>\log_4 3$ を解け．

（一般解）

真数正より　$x(x-5)>0,\ x-5>0$

よって　$x>5$　…… ①

$$\log_{\sqrt{2}}(x-5)=\frac{\log_2(x-5)}{\log_2\sqrt{2}}=2\log_2(x-5)$$

$$=\log_2(x-5)^2$$

$$\log_4 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2 3=\log_2\sqrt{3}$$

であるから，与式より

$\log_2 x(x-5)>\log_2(x-5)^2+\log_2\sqrt{3}$　…… (＊)

$\log_2 x(x-5)>\log_2(x-5)^2\cdot\sqrt{3}$

∴　$x(x-5)>\sqrt{3}(x-5)^2$

①より，$x-5>0$ であるから

$x>\sqrt{3}(x-5)$

$(\sqrt{3}-1)x<5\sqrt{3}$

$$x<\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{15+5\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\cdots ②$$

①かつ②より　$5<x<\frac{15+5\sqrt{3}}{2}$　答

（別解数楽）

（真数条件は上に同じ）

底を２に統一

$\log_{\sqrt{2}}(x-5)=\log_2(x-5)^2$ ⟵ $\log_a b=\log_{a^2}b^2$

$\log_4 3=\log_2\sqrt{3}$ ⟵ $\log_{a^2}b^2=\log_a b$

とすれば

$\log_2 x(x-5)>\log_2(x-5)^2+\log_2\sqrt{3}$　…… (＊)

（以下同じ）

（例５）　２つの曲線

$y=2+\log_2(23-x)$，　$y=\log_{\sqrt{2}}(x-8)$

の交点の x 座標を求めよう．

２つの曲線がともに存在する x の範囲は

$\boxed{ア}<x<\boxed{イウ}$

である．

また，上の２つの式から交点の x 座標は，方程式

$x^2-\boxed{エオ}x-\boxed{カキ}=0$

を満たす．

ゆえに，交点の x 座標は $\boxed{クケ}$ である．

（センター本試）

（別解数楽）

真数正より　$23-x>0,\ x-8>0$

よって　$8<x<23$　…… ①　答

$2+\log_2(23-x)=\log_{\sqrt{2}}(x-8)$

$\log_2 4+\log_2(23-x)=\log_2(x-8)^2$

$\log_2(92-4x)=\log_2(x-8)^2$

∴　$92-4x=(x-8)^2$

$92-4x=x^2-16x+64$

$x^2-12x-28=0$　答

$(x+2)(x-14)=0$　∴　$x=-2,\ 14$

①より　$x=14$　答

(例 6)　次の(1)～(4)の$\boxed{}$に ＝，＞，＜ の記号を入れよ．

(1)　$(\sqrt{2})^2$ $\boxed{}$ $\log_{\sqrt{2}}2$

(2)　$(\sqrt{2})^4$ $\boxed{}$ $\log_{\sqrt{2}}4$

(3)　$(\sqrt{2})^8$ $\boxed{}$ $\log_{\sqrt{2}}8$

(4)　$(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}$ $\boxed{}$ $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8}$

(共通一次)

(1)　$(\sqrt{2})^2=2$

$\log_{\sqrt{2}}2=\log_2 4=2$

答　＝

(2)　$(\sqrt{2})^4=4$

$\log_{\sqrt{2}}4=\log_2 16=4$

答　＝

(3)　$(\sqrt{2})^8=16$

$\log_{\sqrt{2}}8=\log_2 2^6=6$

答　＞

(4)　$(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}=(\sqrt{2})^{2\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}}<2^{\frac{3}{2}}$

$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8}=\log_2 8=3$

ところで　$(2^{\frac{3}{2}})^2=8<3^2=9$

よって　$2^{\frac{3}{2}}<3$

ゆえに　$2^{\sqrt{2}}<3$

答　＜

(別解)

- $(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{9}}=\sqrt{8}<3$ と考えてもよい．
- $y=(\sqrt{2})^x$ と $y=\log_{\sqrt{2}}x$ が $y=x$ に関して対称であることを利用して，グラフで考えてもよい．

(例 7)　(1)　関数 $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸の負の方向に 2，y 軸の正の方向に 1 だけ平行移動すると，$y=\log_2(\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}})$ のグラフ C となる．

(2)　(1)のグラフ C と直線 $y=-1$ との交点の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ -1\right)$

(3)　(1)のグラフ C 上の点Pから x 軸に垂線を下ろし，その足をHとするとき，PH の中点Qは関数 $y=\log_{\boxed{\text{カ}}}(\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}})$ の表すグラフの上にある．

(共通一次)

(1)　$y=\log_2(x+2)+1$

$=\log_2(2x+4)$

(2)　$\log_2(2x+4)=-1$

真数正より　$x>-2$　…… ①

$2x+4=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ より

$$x=-\frac{7}{4}$$

これは①を満たす．

(3)　P$(x,\ y)$，H$(x,\ 0)$，PH の中点QをQ$(X,\ Y)$ とすると

$$X=x,\qquad Y=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\log_2(2x+4)$$

$$Y=\frac{1}{2}\log_2(2X+4)$$

$$=\frac{\log_2(2X+4)}{\log_2 4}\qquad\longleftarrow\ 2=\log_2 4$$

$$=\log_4(2X+4)\qquad\longleftarrow\ \frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b$$

(別解数楽)

$$\left.\begin{aligned}Y&=\log_2\sqrt{2X+4}\\&=\log_4(2X+4)\end{aligned}\right\}\qquad\longleftarrow\ \log_a b=\log_{a^2}b^2$$

私は底が異なる場合は，この性質 (公式) を用いて指導してきました．生徒もその効果を認め，対数計算を得意とするようになりました．

新しい参考書を見るとき，この性質を用いた解答はないかと，十数年来注目しています．

底変換公式の裏技として指導してみてはいかがでしょうか．

(愛媛県　済美平成校)

○この原稿は昨年の 6 月に投稿したものであるが，本年 1 月のセンター試験，数II，数II・Bの第 1 問の〔2〕の(2)に次のように出題された．

$g(x)=\log_2(x+a)$，

$h(x)=\log_4(4x+b)$　$(b>0)$

とする．

$g(1)=h(1)$，　$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=h\left(\dfrac{1}{2}\right)$

となるのは

$a=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$，　$b=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

のときである．

$g(1)=h(1)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{1}{2}\right)$ から

$$\begin{cases} \log_2(1+a)=\log_4(4+b) \\ \log_2\left(\frac{1}{2}+a\right)=\log_4(2+b) \end{cases}$$

真数正より　$a>-\frac{1}{2}$, $b>-2$　…… ①

$\log_2(1+a)=\log_4(1+a)^2$ より

$(1+a)^2=4+b$　…… ②

同様にして

$\left(\frac{1}{2}+a\right)^2=2+b$　…… ③

②−③ より　$\frac{3}{4}+a=2$

$a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{17}{16}$　(①を満たす)

○数研通信 No.41 の『「$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ について」を読んで』(塩見浩三) の中で,「この問題が大学入試に出題されたのは……」は, 名古屋大学ではなく名古屋工大で昭和 50 年の出題でしたので, 次のように訂正します.

> $a<b$ で, m, n は正の整数とするとき, 次の積分の値を求めよ.
>
> $\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n dx$　　(50　名工大)