2次曲線の虚空間曲線

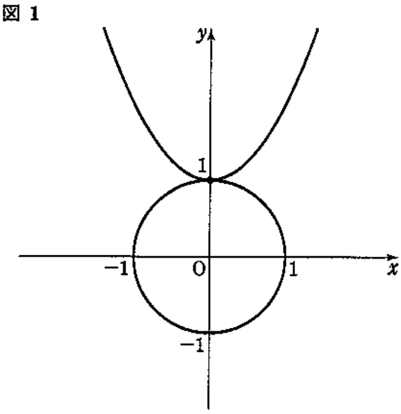
大鳥（おおとり）　秀峰（しゅうほう）

1　はじめに

今から16年前，ある友人から次の質問を受けた．

> 放物線 $y=x^2+1$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点を計算すると，$y=-2,\ 1$ が出てくる．この $y=-2$ の意味が解らない．

図 1



実際に計算してみる．

> **問 1**　放物線 $y=x^2+1$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点の座標を求めよ．

(解)

$$\begin{cases} y=x^2+1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$ とおく

①より　　$x^2=y-1$　$\cdots\cdots$ ③

③を②に代入すると，

$$y-1+y^2=1$$
$$y^2+y-2=0$$
$$(y+2)(y-1)=0$$
$$y=-2,\ 1$$

(i)　$y=1$ のとき，①より $x^2=0$　　よって $x=0$

(ii)　$y=-2$ のとき，①より $x^2=-3$

　x は実数なので不適．

(i)，(ii)より，共有点の座標は　$(0,\ 1)$　答

上の質問を受けるまで，私は説明のできない計算上の数値に出会ったことがなかった．例えば，次の問題を考える．

> **問 2**　方程式 $\sqrt{x}=x-2$ を解け．

(解)

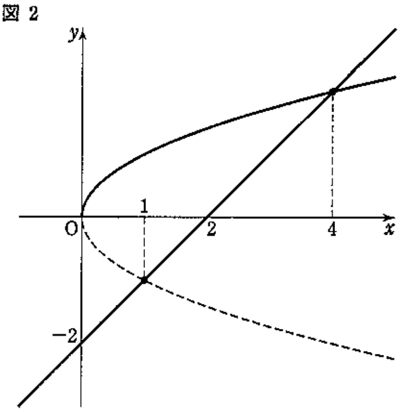
$$\begin{cases} y=\sqrt{x} & \cdots\cdots ① \\ y=x-2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$ とおく．

①，②の共有点の x 座標を求める．

$\sqrt{x}=x-2$ $\cdots\cdots$ ③ の両辺を2乗して

$$x=x^2-4x+4$$
$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)(x-4)=0$$
$$x=1,\ 4$$

図 2



グラフより $x=4$　答

問2の計算で $x=1$ が出てくるのは，③の両辺を2乗したため，$-\sqrt{x}=x-2$ と $\sqrt{x}=x-2$ の区別がなくなったからである．つまり，$y=-\sqrt{x}$ と $y=x-2$ の共有点の x 座標が1である．

この例のように，計算の途中で出てきた数値を説明することができていた．

それから16年間，頭の片隅にこの質問が残ったまま，解決できずにいた．その間，何人もの先生にこの質問を投げかけたが，回答者はいなかった．

2　虚空間の定義

平成 10 年 3 月，高瀬正仁先生 (九州大学教授) の集中講義を受講している休み時間，先生にこの質問をしたところ，次の回答が返ってきた.

「それは，3 次元空間で考えれば解るよ.」

強力なヒントをもらった気がしたが，3 次元空間の意味が解らず，そのままになっていた.

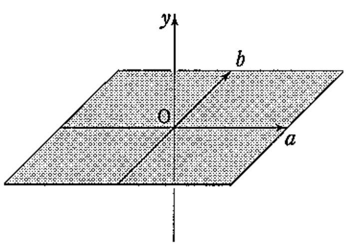
平成 10 年 10 月北廣男先生 (当時大分大学助教授，現鹿児島大学教授) に，同じ質問をしたところ，意外な回答が返ってきた.

「実は 1 週間前，家本宣幸先生 (大分大学教授) と同じような話をしたところです. $x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ として計算してみてください.」

《虚空間の定義》

$x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ として，x 軸を ab 平面 (ガウス平面) へ拡張すると，xy 平面を a，b，y 軸をもつ空間に拡張することができる. この空間を虚空間と定義する.

図 3



3　16 年ぶりの解決

(1)　放物線 $y=x^2+1$ の虚空間曲線

放物線 $y=x^2+1$ に，$x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ を代入して整理すると，$y=a^2-b^2+1+2abi$ となる.

ここで，y は実数として考えているので

$$\begin{cases} y=a^2-b^2+1 & \cdots\cdots ① \\ ab=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より $a=0$ または $b=0$

(i)　$b=0$ のとき

①は $y=a^2+1$ …… ③ となる.

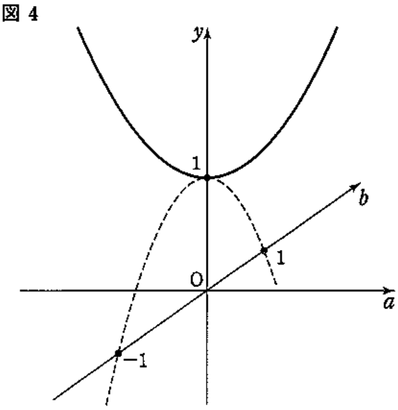
③は，ay 平面上の放物線 $y=a^2+1$ で，もとの放物線を表している.

(ii)　$a=0$ のとき

①は $y=-b^2+1$ …… ④ となる.

④は，虚空間を考えたために現れた曲線で，これを "虚空間曲線" と定義する.

図 4



(2)　円 $x^2+y^2=1$ の虚空間曲線

円 $x^2+y^2=1$ に，$x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ を代入して整理すると，$a^2-b^2+y^2+2abi=1$ となる.

a，b，$y\in\mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} a^2-b^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ ab=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より $a=0$ または $b=0$

(i)　$b=0$ のとき

①は $a^2+y^2=1$ …… ③ となる.

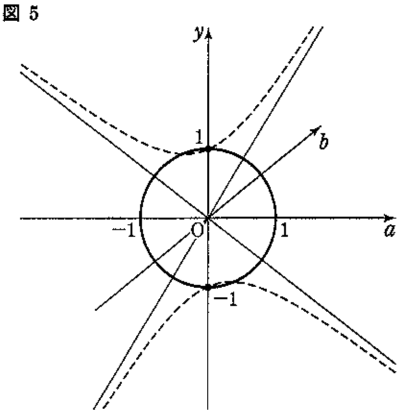
③は，ay 平面上の円 $a^2+y^2=1$ で，もとの円を表している.

(ii)　$a=0$ のとき

①は $b^2-y^2=-1$ …… ④ となる.

④は，円の虚空間曲線である.

図 5



(3) 16 年ぶりの解決

放物線 $y=x^2+1$ の虚空間曲線 $y=-b^2+1$, $a=0$ と，円 $x^2+y^2=1$ の虚空間曲線 $b^2-y^2=-1$, $a=0$ の共有点を求めてみる．

$$\begin{cases} y=-b^2+1 & \cdots\cdots ① \\ b^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$b^2=1-y$ $\cdots\cdots$ ③

③を②に代入すると

$$1-y-y^2=-1$$
$$y^2+y-2=0$$
$$(y+2)(y-1)=0$$
$$y=-2,\ 1$$

(i) $y=1$ のとき

②より $b^2=0$ よって $b=0$

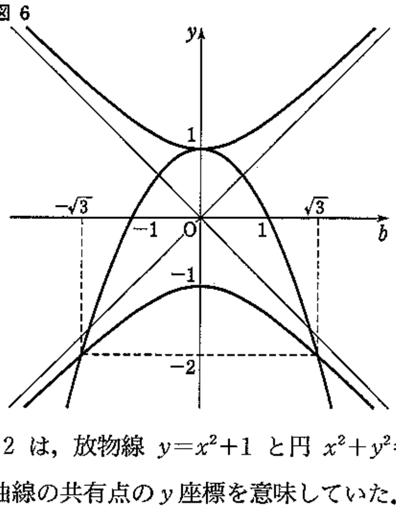
(ii) $y=-2$ のとき

②より $b^2=3$ よって $b=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)より，共有点の虚空間座標は

$$(a,\ b,\ y)=(0,\ 0,\ 1),\ (0,\ \pm\sqrt{3},\ -2)$$

図 6



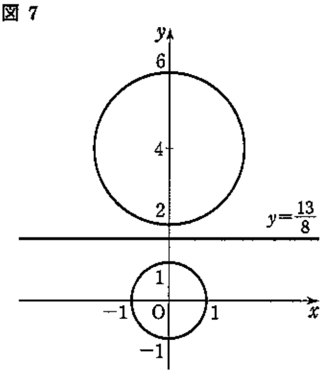
$y=-2$ は，放物線 $y=x^2+1$ と円 $x^2+y^2=1$ の虚空間曲線の共有点の y 座標を意味していた．

4 副産物

交わる 2 円の交点を通る直線の方程式は，一方の円の方程式から他方の円の方程式を引いて求めることができる．2 円が外接する場合，同様にすると 2 円に接する直線の方程式が得られる．では，2 円が外離している場合はどうか．

> 2 円
>
> $x^2+y^2=1$ $\cdots\cdots$ ①,
>
> $x^2+(y-4)^2=4$ $\cdots\cdots$ ②
>
> がある．
>
> ①−②を計算すると，$y=\dfrac{13}{8}$ が出る．
>
> これは何を意味しているか．

図 7



$y=\dfrac{13}{8}$ を①，②に代入すると，

$$x=\pm\frac{\sqrt{105}\,i}{8} \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる．

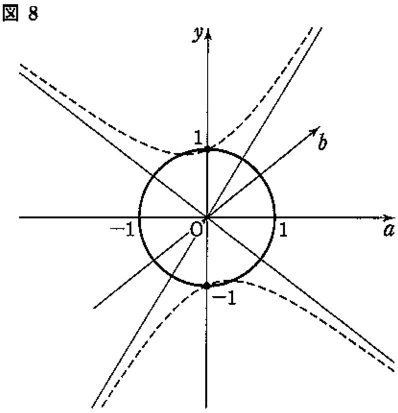
ここで x 座標が虚数になることから，①，②の虚空間曲線を調べてみる．

(1) 2 円の虚空間曲線

(ア) 円 $x^2+y^2=1$ $\cdots\cdots$ ① の虚空間曲線は 3 の(2)と同じなので

$$a=0,\ b^2-y^2=-1 \quad \cdots\cdots ④$$

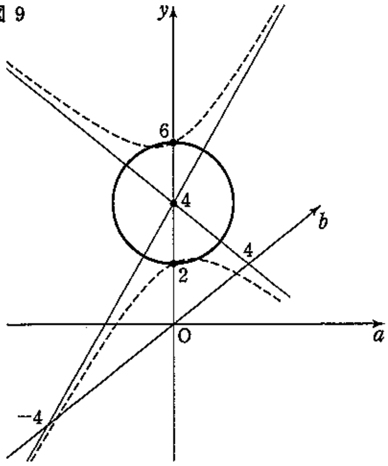
図 8



(イ) 円 $x^2+(y-4)^2=4$ $\cdots\cdots$ ②の虚空間曲線は 3 の(2)と同様に計算すると

$$a=0,\ b^2-(y-4)^2=-4 \quad \cdots\cdots ⑤$$

図 9



(2) 問題解決

④，⑤の共有点を求めてみる．

$$\begin{cases} b^2-y^2=-1 & \cdots\cdots ④ \\ b^2-(y-4)^2=-4 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

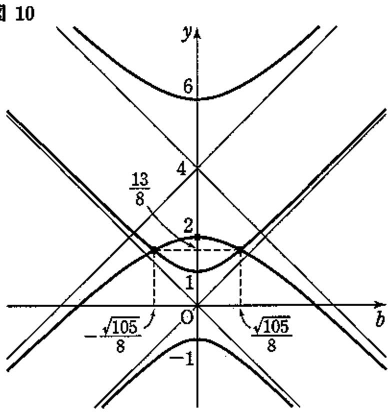
④−⑤ より $y=\dfrac{13}{8}$

④，⑤に代入すると $b=\pm\dfrac{\sqrt{105}}{8}$

よって，共有点の虚空間座標は

$$(a,\ b,\ y)=\left(0,\ \pm\frac{\sqrt{105}}{8},\ \frac{13}{8}\right)$$

図 10



$y=\dfrac{13}{8}$ は2円の虚空間曲線の共有点の y 座標を意味していた．共有点の b 座標は③と同じであることに注目したい．

(3) 副産物

2次曲線の虚空間曲線は，冒頭の問題と同様にこの問題も解決してくれた．この2問は別もののように見えたが，本質的に同じであった．

5　2次曲線の虚空間曲線

ここまでは，放物線 $y=x^2+1$ や円 $x^2+y^2=1$ などの虚空間曲線を調べてきた．ここから，数学Cで扱う2次曲線の虚空間曲線を調べていく．

(1) 放物線の虚空間曲線

2次曲線の放物線の方程式は $y^2=4px$ が一般的だが，ここでは数学Iで扱う放物線
$y=px^2+qx+r$ について調べてみる．

$y=px^2+qx+r$ に $x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ を代入すると

$$y=p(a+bi)^2+q(a+bi)+r$$
$$y=(pa^2-pb^2+qa+r)+b(2pa+q)i$$

y は実数として考えているし，$a,\ b,\ p,\ q,\ r\in\mathbb{R}$

より $\begin{cases} y=pa^2-pb^2+qa+r & \cdots\cdots ① \\ b(2pa+q)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②より $b=0$ または $a=-\dfrac{q}{2p}$

(i) $b=0$ のとき，①に代入すると

$y=pa^2+qa+r$ …… ③ となる．

③は，もとの放物線である．

(ii) $a=-\dfrac{q}{2p}$ のとき，①に代入すると

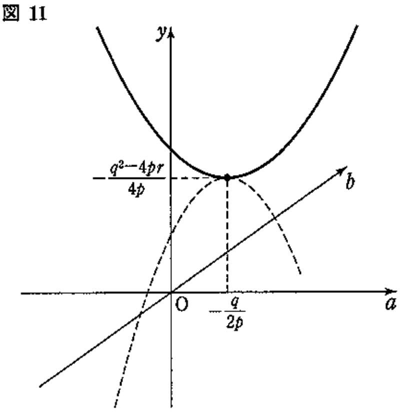
$$y=\frac{q^2}{4p}-pb^2-\frac{q^2}{2p}+r$$
$$y=-pb^2-\frac{q^2-4pr}{4p} \quad \cdots\cdots ④$$

④は，虚空間における平面 $a=-\dfrac{q}{2p}$ 上の放物線である．③，④の頂点は，

$$(a,\ b,\ y)=\left(-\frac{q}{2p},\ 0,\ -\frac{q^2-4pr}{4p}\right)$$

で一致しており，③と④では a^2 と b^2 の係数の符号が逆になっている．

図 11



(2)　楕円の虚空間曲線

楕円 $\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$ $(p>0,\ q>0)$ に $x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ を代入すると

$$\frac{(a+bi)^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$$

$$q^2(a^2-b^2+2abi)+p^2y^2=p^2q^2$$

$$q^2(a^2-b^2)+p^2y^2+2q^2abi=p^2q^2$$

$a,\ b,\ p,\ q,\ y\in\mathbb{R},\ q\neq0$ より

$$\begin{cases} q^2(a^2-b^2)+p^2y^2=p^2q^2 & \cdots\cdots ① \\ ab=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より　$a=0$ または $b=0$

(i)　$b=0$ のとき，①に代入すると

$$q^2a^2+p^2y^2=p^2q^2$$

$$\frac{a^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1 \quad \cdots\cdots ③$$

③は，もとの楕円である．

(ii)　$a=0$ のとき，①に代入すると

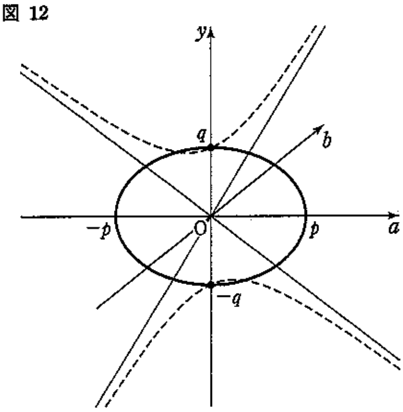
$$-q^2b^2+p^2y^2=p^2q^2$$

$$\frac{b^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=-1 \quad \cdots\cdots ④$$

④は，虚空間における by 平面上の y 軸双曲線である．

また，④の頂点 $(a,\ b,\ y)=(0,\ 0,\ \pm q)$ は，楕円③の y 軸上にある頂点と一致する．

図 12



(3)　双曲線の虚空間曲線

x 軸双曲線 $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=1$ $(p>0,\ q>0)$ に $x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ を代入すると

$$\frac{(a+bi)^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1$$

$$q^2(a^2-b^2+2abi)-p^2y^2=p^2q^2$$

$$q^2(a^2-b^2)-p^2y^2+2q^2abi=p^2q^2$$

$a,\ b,\ p,\ q,\ y\in\mathbb{R},\ q\neq0$ より

$$\begin{cases} q^2(a^2-b^2)-p^2y^2=p^2q^2 & \cdots\cdots ① \\ ab=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より　$a=0$ または $b=0$

(i)　$b=0$ のとき，①に代入すると

$$q^2a^2-p^2y^2=p^2q^2$$

$$\frac{a^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1 \quad \cdots\cdots ③$$

③は，もとの x 軸双曲線である．

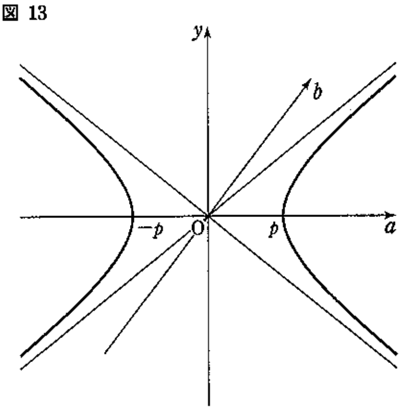
(ii)　$a=0$ のとき，①に代入すると

$$-q^2b^2-p^2y^2=p^2q^2$$

$$\frac{b^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=-1 \quad \cdots\cdots ④$$

$b,\ p,\ q,\ y\in\mathbb{R}$ より④は不能．よって，x 軸双曲線の虚空間曲線は存在しない．

図 13



y 軸双曲線 $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=-1$ $(p>0,\ q>0)$ に $x=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ を代入すると，上と同様に

$$\begin{cases} q^2(a^2-b^2)-p^2y^2=-p^2q^2 & \cdots\cdots ⑤ \\ ab=0 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

⑥より　$a=0$ または $b=0$

(iii)　$b=0$ のとき，⑤に代入すると

$$q^2a^2-p^2y^2=-p^2q^2$$

$$\frac{a^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=-1 \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑦は，もとの y 軸双曲線である．

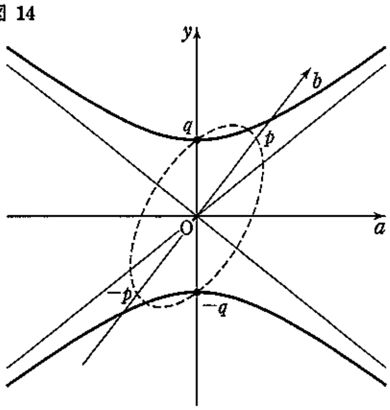
(iv)　$a=0$ のとき，⑤に代入すると

$$-q^2b^2-p^2y^2=-p^2q^2$$

$$\frac{b^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1 \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑧は，by 平面上の楕円である．また，⑧の y 軸上の頂点 $(a,\ b,\ y)=(0,\ 0,\ \pm q)$ は，双曲線⑦の頂点と一致する．

図 14



(4)　2 次曲線の虚空間曲線の特徴

(1)〜(3)の研究からわかるように，2 次曲線の虚空間曲線には次の特徴がある．

(i)　放物線，楕円，y 軸双曲線の虚空間曲線はそれぞれ 1 つずつ存在するが，x 軸双曲線の虚空間曲線は存在しない．

(ii)　放物線の虚空間曲線は放物線，
　楕円の虚空間曲線は双曲線，
　双曲線の虚空間曲線は楕円
である．
(楕円と双曲線が意外なところで結びついた．)

(iii)　もとの曲線と虚空間曲線の頂点は一致する．

(iv)　虚空間曲線は，a 軸に垂直な平面上にあり，ay 平面に関して対称である．

6　虚空間曲線を考える意義

(1)　虚数単位 i を視覚的に捉える

放物線 $y=x^2+1$ の虚空間曲線は，3(1)より $a=0$, $y=-b^2+1$ である．この曲線が ab 平面 (ガウス平面) と交わる点を調べると，$y=0$ より $b=\pm1$

図 4

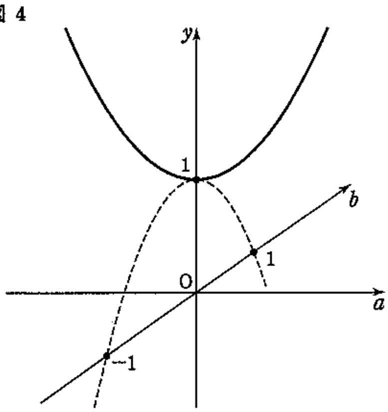


図 15

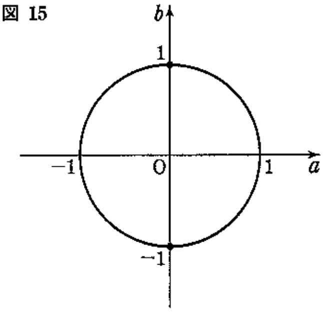


図 4 は放物線 $y=x^2+1$ で，$y=0$ とおいたときの解 $x=\pm i$ を視覚的に捉えたものである．

(2)　ω (オメガ) を視覚的に捉える

3 次方程式 $x^3=1$ の虚数解，つまり，2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の解が ω である．放物線 $y=x^2+x+1$ の頂点の座標は $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ であり，その虚空間曲線は，5(1)より $a=-\dfrac{1}{2}$, $y=-b^2+\dfrac{3}{4}$ である．この曲線が ab 平面 (ガウス平面) と交わる点を調べると，$y=0$ より $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

図 16

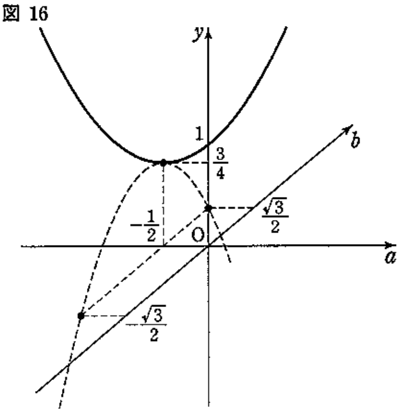


図 17

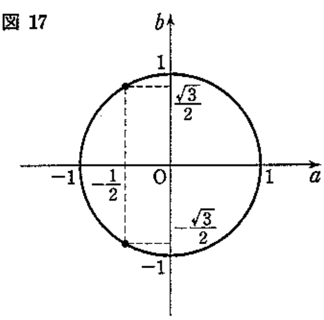


図 16 は放物線 $y=x^2+x+1$ で，$y=0$ とおいたときの解 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を視覚的に捉えたものである．

(3)　虚空間曲線を考える意義

xy 平面は実数を扱っているため，虚数を表現することができず，虚数はガウス平面でしか図示できなかった．つまり，xy 平面とガウス平面を切り離して考えていた．ところが，虚空間は xy 平面とガウス平面を１つの空間に収めることを可能にし，虚空間曲線は xy 平面上の曲線とガウス平面上の虚数を視覚的に結びつけて捉えることを可能にしている．

《虚空間曲線を考える意義》

虚空間曲線は２次曲線，２次方程式及び虚数解を１つの空間の中で，視覚的に関連づけて捉えることを可能にする．

7　３次関数 $y=x^3-1$ の虚空間曲線

３次関数 $y=x^3-1$ に，$x=a+bi\,(a,\ b\in\mathbb{R})$ を代入すると

$$y=(a+bi)^3-1$$
$$y=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i-1$$
$$y=(a^3-3ab^2-1)+b(3a^2-b^2)i$$

a，b，$y\in\mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} y=a^3-3ab^2-1 & \cdots\cdots ① \\ b(3a^2-b^2)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より　$b=0$ または $b=\pm\sqrt{3}\,a$

(i)　$b=0$ のとき，①に代入すると

$$y=a^3-1 \quad \cdots\cdots ③$$

③は，もとの３次関数である．

(ii)　$b=\pm\sqrt{3}\,a$ のとき，①に代入すると

$$y=a^3-9a^3-1$$
$$y=-8a^3-1 \quad \cdots\cdots ④$$

図 18

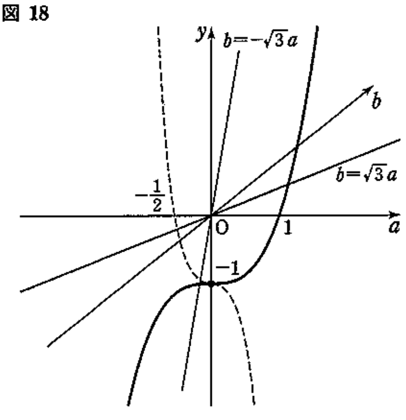
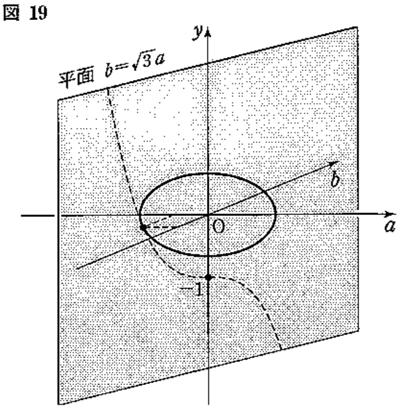


図 19



④は，ay 平面上の曲線 $y=-8a^3-1$ を，平面 $b=\pm\sqrt{3}\,a$（y 軸を含み ay 平面と 60° の角をなす２平面）上へ，b 軸と平行に映した影からなる曲線である．これが，３次関数 $y=x^3-1$ の虚空間曲線である．④において $y=0$ とすると，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる．これは，ガウス平面上の ω を表している．

これで，３次関数の虚空間曲線の存在が確認できた．この例では虚空間曲線が平面 $b=\pm\sqrt{3}\,a$ 上に現れ，また，曲線が２本現れた．以上から，３次関数の虚空間曲線は，２次曲線のそれとは性質が大きく異なっていることがわかる．

8　今後の課題

高校数学Ｃで扱う２次曲線の虚空間曲線について調べてきたが，今後は次の解明が研究課題として考えられる．

(1)　数学Ｃで扱わない２次曲線の虚空間曲線の有無を判別する方法

(2)　数学Ｃで扱わない２次曲線の虚空間曲線の様々な性質

(3)　３次以上の曲線の虚空間曲線

（存在は７で示した）

（大分県立杵築高等学校）