加重重心の考え方を利用した解法について

宮田 毅一郎（みやた きいちろう）

1 はじめに

ベクトルの分点や共線条件，ベクトル分解などは，ベクトルを学んでいく上で重要な概念です．

しかし，実際に問題を解く上において，生徒達は分数計算が苦手なのか私達が期待するほど正解に辿り着かないことが多いようです．

前任校（県立輪島高校）時代にベテランの先生から，教科書に書いてある解法以外の方法として「おもり」を用いる方法（後述する加重重心の考え方を利用した解法）を教えて頂き，機会があるごとに利用方法だけは生徒に教えてきました．

日頃，生徒には「わかるには，まずイメージとしてわかることである」と話をした上で，「図をかくなどこれらができれば半分解けたも同じ（半分という数値は科学的な考察と裏付けがあって言っている訳ではないですが……）」と言いつつ授業を行っています．この解法は生徒の方も扱い易いのか，その場では使い方を理解してくれる割合も多いと思います．しかし，使い方次第では，ややもすれば，ただの受験テクニックになりかねない畏れもあります．が，今後の指導方法を考えていく上で，実際に入試で出題された教科書の基本レベルの問題を利用しながら，この解法の背景を考えつつ自分なりに考え方をまとめてみました．

2 従来の問題の解答例

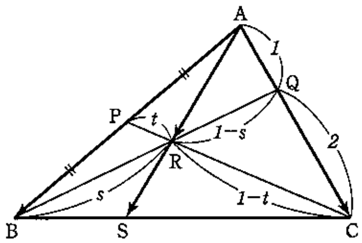
問題 1（2000 山梨大）

△ABC の辺 AB の中点を P，辺 AC を 1：2 に内分する点を Q とし，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{AR}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AR と線分 BC との交点を S とするとき，BS：SC を求めよ．

解法 1（ベクトルの 1 次独立性を用いて）



(1) BR：RQ$=s:(1-s)$ $[0<s<1]$ とすると

$$\overrightarrow{AR}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AQ}$$
$$=(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}s\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots ①$$

PR：RC$=t:(1-t)$ $[0<t<1]$ とすると

$$\overrightarrow{AR}=(1-t)\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②から

$$(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}s\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ であり，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行でないから

$$1-s=\frac{1}{2}(1-t),\quad \frac{1}{3}s=t$$

これを解いて　$s=\frac{3}{5}$，$t=\frac{1}{5}$

ゆえに，①から　$\overrightarrow{AR}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$　答

(2) $\overrightarrow{AS}=k\overrightarrow{AR}$ とすると

$$\overrightarrow{AS}=\frac{2}{5}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}k\overrightarrow{AC}$$

S は辺 BC 上の点であるから　$\frac{2}{5}k+\frac{1}{5}k=1$

よって　$k=\frac{5}{3}$

$$\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

したがって　BS：SC$=1:2$　答

解法2（チェバ・メネラウスの定理を用いて）

チェバ(Ceva)の定理

△ABCの3頂点A，B，Cと三角形の辺上またはその延長上にない点Oとを結ぶ直線が，対辺BC，CA，ABまたはその延長と交わるとき，交点をそれぞれP，Q，Rとすると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

メネラウス(Menelaus)の定理

△ABCの辺BC，CA，ABまたはその延長が，三角形の頂点を通らない一直線とそれぞれ点P，Q，Rと交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

証明　略

チェバの定理により $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BS}{SC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$ が成り立つから

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{BS}{SC}\cdot\frac{2}{1}=1 \qquad ゆえに \quad \frac{BS}{SC}=\frac{1}{2}$$

よって　$BS:SC=1:2$

これより　$\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

△ABSと直線BCにメネラウスの定理を用いると，$\frac{BC}{CS}\cdot\frac{SR}{RA}\cdot\frac{AP}{PB}=1$ であるから

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{SR}{RA}\cdot\frac{1}{1}=1 \qquad ゆえに \quad \frac{SR}{RA}=\frac{2}{3}$$

よって　$SR:RA=2:3$

これより

$$\overrightarrow{AR}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AS}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

答　(1)　$\overrightarrow{AR}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

(2)　$BS:SC=1:2$

三角形の各頂点から対辺に引いた直線が1点に交わる場合がある．そして，この種の問題を統一的に扱おうとするのが，チェバの定理である．

三角形の辺上の内分点について，チェバの定理とその逆を示し，これらの定理を活用して，重心，内心，垂心の存在を示し，また，外心の存在から垂心の存在を（垂心の存在から外心の存在の場合もあるが）を示している．

3　重心

3.1　n 個の重心

重心について最初に出てくるのは，次の3つの定理である．

(1)　△ABCで，各頂点と対辺の中点を結ぶ3つの線分（中線）AD，BE，CFは1点で交わり，その交点をGとすると，3つの中線はGで 2：1 の比に内分されている．

(2)　3点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする三角形の重心は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

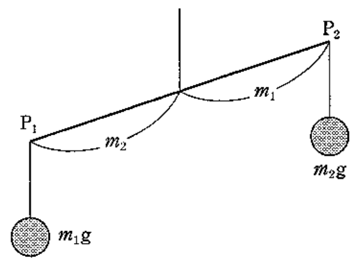
(3)　三角形の3頂点の位置ベクトルを $\overrightarrow{x_1}$，$\overrightarrow{x_2}$，$\overrightarrow{x_3}$ とするとき，この三角形の重心の位置ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}}{3}$$

原点に戻って重心は何かと考えれば，重心というのは，物理学の概念であって，その発端は，

“2つの点 P_1，P_2 に，それぞれ m_1，m_2 の質量が与えられているとき，その重心は P_1P_2 を $m_2:m_1$ の比に分ける点である．”

ということであったようです．



これは，線分 P_1P_2 が質量を無視できるような軽い材料で出来ているとすると，重力の働くところが重心で，ここで支えると，釣合ってくることを意味する．この場合，P_1P_2 がつねに水平になるのではなく，はじめに斜めにおけば，そのままの位置で安定するということである．

3.2　加重重心

定義　n 個の点 P_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に質量 m_i がかかっているとき，P_i の位置ベクトルを $\overrightarrow{x_i}$ とすると，

$$\vec{g}=\frac{m_1\overrightarrow{x_1}+m_2\overrightarrow{x_2}+\cdots\cdots+m_n\overrightarrow{x_n}}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}$$

で表される点が，この n 個の点の**加重重心**である．

このとき，$n=3$ でいうと，次のことが成り立つ．

問題

$\triangle P_1P_2P_3$ で，次の3点は一致する．

(1) P_2P_3 を $m_3:m_2$ に分ける点を Q_1 とし，線分 P_1Q_1 を $(m_2+m_3):m_1$ に分ける点

(2) P_3P_1 を $m_1:m_3$ に分ける点を Q_2 とし，線分 P_2Q_2 を $(m_3+m_1):m_2$ に分ける点

(3) P_1P_2 を $m_2:m_1$ に分ける点を Q_3 とし，線分 P_3Q_3 を $(m_1+m_2):m_3$ に分ける点

証明 P_i $(i=1, 2, 3)$ の位置ベクトルを $\vec{x_i}$ とすると，Q_1 の位置ベクトルは，

$$\vec{q_1}=\frac{m_2\vec{x_2}+m_3\vec{x_3}}{m_2+m_3}$$

で P_1Q_1 を $(m_2+m_3):m_1$ の比に分ける点Xの位置ベクトルは，

$$\vec{x}=\frac{m_1\vec{x_1}+(m_2+m_3)\vec{q_1}}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_1\vec{x_1}+m_2\vec{x_2}+m_3\vec{x_3}}{m_1+m_2+m_3}$$

他の2点も同様である．答

これは，P_2P_3 を Q_1 を支点とした天秤と考えると，支点 Q_1 には (m_2+m_3) の質量がかかる．そして，P_1Q_1 と P_2Q_2 の交点をGとすると，P_1Q_1 が点Gを支点として釣合うとき，

$$P_1G:GQ_1=(m_2+m_3):m_1$$

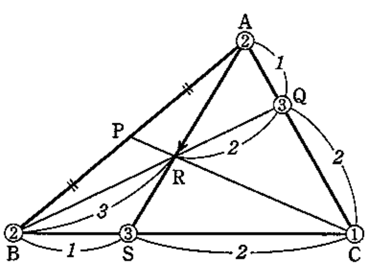
であることと合致している．

3.1 (1)の重心は，3頂点に同一の質量がかかっているときの重心となるわけです．

3.3 加重重心の考え方を用いた方法

解法3 (加重重心の考え方を用いて)

加重重心の考え方を用いると，$\triangle ABC$ の辺AC上において，題意より $AQ:QC=1:2$ であるから点A，Cにそれぞれ2g，1gのおもりを乗せると点Qに関して釣合っている．同様に，辺AB上において，題意より $AP:PC=1:1$ であるから点A，Bにそれぞれ2g，2gのおもりを乗せると点Pに関して釣合っている．



これより，辺BC上において，点B，Cにそれぞれ2g，1gのおもりが乗って点Sに関して釣合っているので，$BS:SC=1:2$ である．

このとき，点Aに2g，点Sに計 $2+1=3$ g の重さがかかって点Rに関して釣合っているので，$AR:RS=3:2$ である．

よって，$\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{AR}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AS}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

答 (1) $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

(2) $BS:SC=1:2$

今度は空間図形について考えてみます．

問題 (2000 札幌医大)

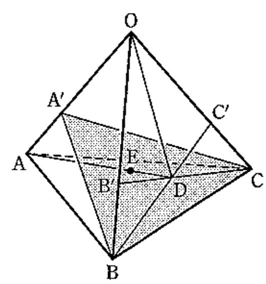
四面体OABCを考え，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ とする．また，線分OA，OB，OCを $2:1$ に内分する点をそれぞれ A'，B'，C' とし，直線 BC' と直線 $B'C$ の交点をD，3点 A'，B，Cを通る平面と直線ADとの交点をEとする．

(1) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ で表せ．

(2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

解答1 (ベクトルの1次独立性を用いて)

(1)



点Dは直線 BC' 上にあるから，s を実数として

$$\overrightarrow{OD}=(1-s)\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC'}$$

すなわち $\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{b}+\frac{2}{3}s\vec{c}$ …… ①

と表される．

また，点Dは直線 $B'C$ 上にあるから，t を実数として

$$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OB'}+t\overrightarrow{OC}$$

すなわち $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ …… ②

と表される．$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから，①，②より

$$1-s=\frac{2}{3}(1-t),\ \frac{2}{3}s=t$$

これを解いて　$s=\frac{3}{5},\ t=\frac{2}{5}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(2)　点Eは直線AD上にあるから，u を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-u)\vec{a}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}\quad\cdots\cdots ③$$

と表される．$\vec{a}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ であるから，③より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{3}{2}(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}$$

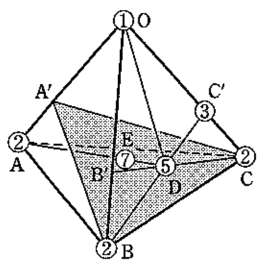
ここで，点Eは平面A′BC上にあるから

$$\frac{3}{2}(1-u)+\frac{2}{5}u+\frac{2}{5}u=1$$

これを解いて　$u=\frac{5}{7}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$

解答2（加重重心の考え方を用いて）



加重重心の考え方を用いると，四面体OABCの辺OA上において，題意より OA′：A′A＝2：1 であるから点O，Aにそれぞれ1g，2gのおもりを乗せると点A′に関して釣合っている．同様に，辺OB，OC上において点B，Cにそれぞれ2gのおもりを乗せるとそれぞれ点B′，C′に関して釣合っている．

このとき，△OBCにおいて点B′，C′に計 1+2=3g の重さがかかって釣合っているので，BD：DC′＝CD：DB′＝3：2 である．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC'}}\\&=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\quad\text{答}\end{aligned}$$

△OBCにおいて点Dに計 2+3=5g の重さがかかって釣合っている．また，△OADにおいて点Aに2gの重さがかかって釣合っているので，AE：ED＝5：2 である．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)\\&=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}\quad\text{答}\end{aligned}$$

空間図形においても，同様に解答を導くことができる．

加重重心の考え方を用いた解法は，他の解法より早く解答を求めることができる．センター試験のような答えだけを記入するマークセンス方式のテストならこの方法はかなり有効であるかもしれないが，国公立の2次試験のような記述式では安易に使えないので，解答1の解法を押さえた上での確認のための方法となろう．前に述べたように，この解法の使い方次第では，ややもすれば，ただの受験テクニックになりかねない畏れもあろう．

私の勉強不足で上手くまとめられなかったが，生徒のためにも良い指導方法を考えていく上で，広くアイディアを頂ければ幸いに思う．

4　おわりに

私が知る限りではテーマの主題である加重重心という言葉は，高校生が使っている数学Bの教科書にはまず出てきません．一部の受験参考書等にある程度だと思います．多分，学習指導要領によって，多くの内容を盛り込めないこともあるかもしれません．しかし，加重重心の考え方は工業の教科書には出てきています．また，数学Ⅲにおいて漸く弧度法，三角関数の微分を習うのに，物理ではそれよりも早い時期に波動を扱う上で三角関数が出てきます．工業の科目でも同様です．つまり，今の学習指導要領が教科間の繋がりを考えたものになっていません．これは，指導していく我々にとっても，指導対象である生徒にとっても残念なことだと思います．数学・物理・工業の繋がりを考えたカリキュラムが必要でないかとも思いますが，学習指導要領の見直しを抜きに安易に総合的な学習でとなれば，我々に大変な負担がかかることはいうまでもありません．学ぶ生

徒の立場に立ったカリキュラムの編成を望みたいと思います．

〈参　考　文　献〉

(1) 栗田　稔，大学への数学　問題はどう作られるのか，東京出版，1985.

(2) 数研出版編集部編，2000年版　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B 入試問題集（文理系），数研出版，2000.

（金沢市立工業高等学校）