# いままで出会ったことのない「ある数列の極限値」について

仁平(にへい)　政一(まさかず)

## 1. はじめに

次の美しい等式は，よく知られており，数列を学んでいる高校生なら必ず出会うと言っても（例えば文献[1]），過言ではないであろう．

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})$$

この等式に付随した次の問題もしばしば見かける．

> 次の数列の極限値を求めよ．
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)}{n^3} \quad \cdots\cdots (\mathrm{II})$$

ここで，上記の等式(I)の各項にルートを付けた式の和

$$\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}$$

を考えてみよう．

この式の和を直接求めることは絶望的であると思われる．そこで，上記の問題(II)と同様な，次のような極限値の問題を考えることにする．

> **問題 A.** 次の数列の極限値を求めよ．
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}}{n^2}$$

このような問題に，いままで筆者は一度も出会ったことがないので，極限値はどうなるのか，その存在の有無も含めて，興味がそそられた．

結論から言うと，極限値 $\frac{1}{2}$ をもち，しかも高校の学習の範囲で，簡単に求められることがわかった．本稿ではこのことと，その一般化について報告しよう．

## 2. 問題 A の極限値

では，さっそく問題Aの極限値を求めよう．

$k^2<k(k+1)<(k+1)^2$ であるから

$$k<\sqrt{k(k+1)}<k+1$$

よって

$$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}<\frac{n(n+1)}{2}+n$$

各辺を $n^2$ で割ると

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}}{n^2}<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$$

ここで，$n\longrightarrow\infty$ とすれば $\frac{1}{n}\longrightarrow 0$ より

$$\frac{1}{2}\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}}{n^2}\leqq\frac{1}{2}$$

を得る．したがって，問題Aの極限値が $\frac{1}{2}$ であることがわかる．

ここで，問題Aの一般化を考えてみよう．

## 3. 一般の場合の極限値

$k(k+1)$ の自然な一般化は

$$k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)$$

であるから，問題Aの一般化は

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)}$$

を $n$ の何乗かで割った式の極限値を求める問題と考えるのがやはり自然であろう．ここに $p$ は非負の整数とする．

そこで次の極限値の問題を考えよう．

> **問題 B.** 次の数列の極限値を求めよ．
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)}}{n^s}$$
> ここに，$p$ は非負の整数，$s$ は1以上の実数とする．

それでは，さっそく取りかかることにしよう．

$$k^{\frac{p+1}{2}}<\sqrt{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)}<(k+p)^{\frac{p+1}{2}}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{p+1}{2}}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)}<\sum_{k=1}^{n}(k+p)^{\frac{p+1}{2}} \quad ①$$

ここで，$\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{p+1}{2}}$ の下界と $\sum_{k=1}^{n}(k+p)^{\frac{p+1}{2}}$ の上界を求める．いま，記述を簡潔にするために $\frac{p+1}{2}=r$ とおく．

関数 $y=x^r$ は $x\geqq 0$ で単調に増加するから

$$\int_0^n x^r dx<\sum_{k=1}^{n}k^r$$

が得られる (図1参照).

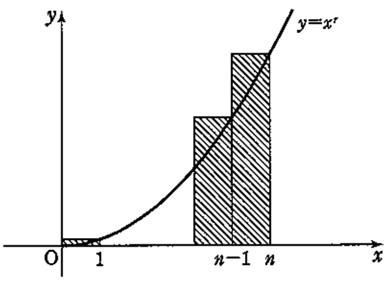


図 1

ところで

$$\int_0^n x^r dx=\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_0^n=\frac{n^{r+1}}{r+1}$$

であるから

$$\frac{n^{r+1}}{r+1}<\sum_{k=1}^{n}k^r \quad ②$$

を得る．

また，関数 $y=(x+p)^r$ は $x\geqq 0$ で単調に増加するから，同様にして

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k+p)^r<\int_0^n(x+p)^r dx$$

が得られる (図2参照).

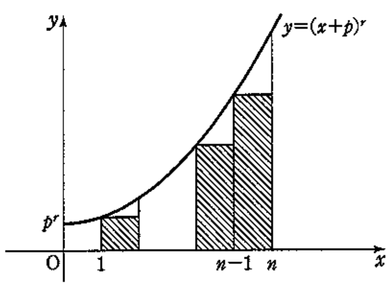


図 2

よって，

$$\sum_{k=1}^{n}(k+p)^r<\int_0^n(x+p)^r dx+(n+p)^r$$

が得られ，これより

$$\sum_{k=1}^{n}(k+p)^r<\frac{(n+p)^{r+1}}{r+1}+(n+p)^r \quad ③$$

が得られる．

したがって，①，②，③から

$$\frac{n^{r+1}}{r+1}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)}<\frac{(n+p)^{r+1}}{r+1}+(n+p)^r$$

を得る．ここで各辺を $n^s$ で割れば

$$\frac{n^{r-s+1}}{r+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)}}{n^s}<\frac{n^{r-s+1}}{r+1}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{r+1}+n^{r-s}\left(1+\frac{p}{n}\right)^r \quad ④$$

となる．

この④を用いて，3つの場合に分けて問題Bの極限値を求める．

(1) $r-s+1>0$ すなわち $r+1>s\geqq 1$ のとき

$n\longrightarrow\infty$ とすれば $n^{r-s+1}\longrightarrow\infty$ であるから，問題Bの極限は無限大に発散する．

(2) $s=r+1$ のとき

$n\longrightarrow\infty$ とすれば $\frac{p}{n}\longrightarrow 0$ となるから，はさみうちの原理により，問題Bの極限値は $\frac{1}{r+1}$ となる．

(3) $s>r+1$ のとき

$$n^{r-s+1}=\frac{1}{n^{s-r-1}}\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty),$$

$$n^{r-s}=\frac{1}{n^{s-r}}\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$$

であるから，やはりはさみうちの原理により問題Bの極限値は0となる．

以上から，問題Bが面白くなるのは $s=r+1$ のときであることがわかる．ここで $\frac{p+1}{2}=r$ であったことに注意して，(2)の場合を抜き出してまとめると次のような美しい定理が得られる．

**定理** $p$ は非負の整数とする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+p)}}{n^{\frac{p+3}{2}}}=\frac{2}{p+3}$$

## おわりに

定理からわかるように，$p$が奇数のとき問題もその極限値もきれいな形になる．

問題Aはその中で最も簡単な問題であることがわかる．次に形がきれいで簡単なものは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}}{n^3}$$

である．もちろんこの極限値は$\frac{1}{3}$である．

また，よく知られている問題（例えば文献[2]）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

は上記定理の $p=0$ の場合になっていることは言うまでもないであろう．

〈参 考 文 献〉

[1] 永尾汎他著，高等学校 数学A（改訂版）p.89 数研出版（平成13年1月発行）

[2] 永尾汎他著，高等学校 数学III（改訂版）p.162 数研出版（平成13年1月発行）

（茨城県立藤代高等学校）