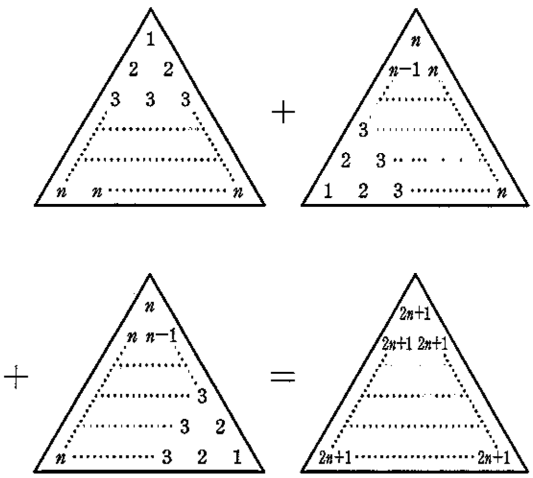
$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$ の計算方法について
（回転にこだわって）

石原(いしはら)　諭(さとし)

自然数の２乗和については，数研出版の新編数学Aの教授資料 p.109 に載っているような，正三角形を回転させて求める方法がよく知られています．チャート式数学Ⅰ（砂田利一著，数研出版）p.150 にも出ています．



$$3S_n=(2n+1)(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{3}\cdot(1+2+3+\cdots\cdots+n)(2n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

今回これを使って授業をやろうと思ったのですが，ふと，「これを拡張できないかな」と思い，３乗和でも似たやり方ができないか考えてみました．以下は，多少強引なところもありますが，授業中の話題にはなるかなと思います．

歴史をひもといてみると，ガウスが10歳のときに１から100までの自然数の和を求めるために用いたと言われる方法は，$1+2+\cdots\cdots+100$ を $100+99+\cdots\cdots+2+1$ とひっくり返して

$$\begin{array}{r} 1+\ \ 2+\ \ 3+\cdots\cdots+\ 99+100 \\ +)\ \underline{100+\ 99+\ 98+\cdots\cdots+\ \ 2+\ \ 1} \\ 101+101+101+\cdots\cdots+101+101 \end{array}$$

とし，$101\times100\div2=5050$ と計算しています．これは与式を180度回転して加えていると見ることができます．２乗和は正三角形を用いて120度ずつ回転して加えていると見ることができます．それならば，３乗和は正方形で90度ずつ回転させたら……と思うのは自然なことかもしれません．

それでは，まず簡単な例を挙げます．

例　$1^3+2^3+3^3+4^3$ について

$$1^3+2^3+3^3+4^3=1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3)$$
$$+(4+8+12+16+12+8+4)$$

と分解して，下の図のようにL字型に並べていきます．

これを90度ずつ回転させ，同じ位置にある数字どうしを加えます．これは結果的には，掛け算の九九の表の一部となっています．

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

＋

4	3	2	1
8	6	4	2
12	9	6	3
16	12	8	4

＋

16	12	8	4
12	9	6	3
8	6	4	2
4	3	2	1

＋

4	8	12	16
3	6	9	12
2	4	6	8
1	2	3	4

＝

25	25	25	25
25	25	25	25
25	25	25	25
25	25	25	25

したがって，

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+4^3&=(5^2\times4^2)\div4\\
&=25\times16\div4=100
\end{aligned}
$$

と計算することができます．

一般の場合　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$ では

1	2	3	·	n
2	4	6	·	$2n$
3	6	9	…	$3n$
…	…	…	…	…
n	$2n$	$3n$	…	n^2

＋

n	…	3	2	1
$2n$	…	6	4	2
$3n$	·	9	6	3
…	…	…	…	…
n^2	…	$3n$	$2n$	n

＋

n^2	…	$3n$	$2n$	n
…	…	…	…	
$3n$	·	9	6	3
$2n$	…	6	4	2
n	·	3	2	1

＋

n	$2n$	$3n$	…	n^2
…	…	…	…	…
3	6	9	…	$3n$
2	4	6	…	$2n$
1	2	3	…	n

＝

$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	…	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	…	$(n+1)^2$
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	…	$(n+1)^2$
…	…	…	…	…
$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	…	$(n+1)^2$

したがって，

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3&=(n+1)^2\times n^2\div4\\
&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

となります．

はじめは，3乗された数をどのように分解すればいいか考えました．元になったのは3乗の和でよく用いられる小石を並べるやり方です（数研出版の新編A教授資料 p.120 に載っています）．この小石が並んだ状態を正方形の碁盤の目にのるように区切りました．それで4回，90度ずつ回転させて，同じ位置にある数字を足してみたら，うまくいっていました．

以上は，すでによく知られている話題かもしれません．御容赦ください．

（静岡県立富士宮西高等学校）