数学Ⅱ微分・積分の発展問題

立体の体積と表面積について

清水（しみず）　耕二（こうじ）

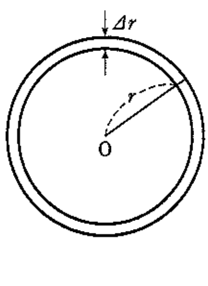
（要旨）
球の体積を半径について微分すると，球の表面積が得られる．この考えを内接球をもつ立体にまで拡張できることを示し，正多面体や円錐に応用する．

（Ｉ）球の体積を半径で微分すると球の表面積が得られる理由

半径 r の球の体積を $V(r)$ とすると

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$$

$4\pi r^2$ は球の表面積 $S(r)$ であるが，なぜ体積を半径で微分すると表面積が得られるのかを微分の定義にもどって説明しよう．



右図のように半径 r と $r+\Delta r$ の球を考える．それぞれの球の体積を $V(r)$，$V(r+\Delta r)$ とすると，その体積の差は

$$\Delta V=V(r+\Delta r)-V(r) \quad \cdots\cdots ①$$

である．また表面積を $S(r)$ とすると，Δr が非常に小さいとき

$$\Delta V \fallingdotseq S(r)\cdot\Delta r \quad \cdots\cdots ②$$

と近似できる．①，②より

$$S(r)\cdot\Delta r \fallingdotseq V(r+\Delta r)-V(r)$$

$$S(r)\fallingdotseq\frac{V(r+\Delta r)-V(r)}{\Delta r}$$

$\Delta r\to 0$ の極限では

$$S(r)=\frac{dV(r)}{dr}$$

となり，このことによって球の体積を半径で微分すると球の表面積が得られることが説明できる．

（Ⅱ）円錐の体積と側面積・底面積について

円錐の底面の半径を r，高さを h とすると，体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

である．これを半径 r や高さ h について微分するとどうなるであろうか．はじめに，r と h を独立変数と考えて，それぞれの変数について微分を試みる．

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_h=\frac{2}{3}\pi rh \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_r=\frac{1}{3}\pi r^2$$

これらの量は，図形的に意味のあるものにはならない．

そこで r と h を独立変数と考えず，半径 r の増加にともなって円錐が相似形を保ったまま拡大するように，高さ h が変化すると仮定しよう．つまり k を比例定数として

$$h=k\cdot r$$

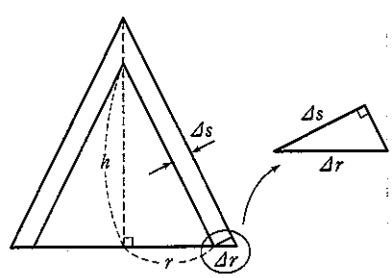
と置いてみる．体積 V を半径 r のみの関数として表すと，

$$V(r)=\frac{1}{3}k\pi r^3$$

となる．これを半径 r について微分すると，

$$\frac{dV}{dr}=k\pi r^2=\pi rh$$

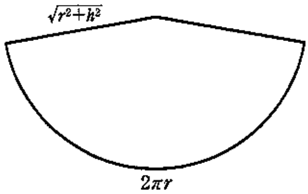
このままではまだ意味のある量を表現できていない．下の図のように，半径 r の増加にともなって円錐の側面の厚みは Δr ではなく Δs だけ増加する．



直角三角形の相似から

$$\Delta s : \Delta r = h : \sqrt{r^2+h^2}$$

が成り立つ.



円錐の側面積を S とすると,(I)と同様な考え方をして

$$S \fallingdotseq \frac{\Delta V}{\Delta s}$$
$$= \frac{\Delta V}{\Delta r} \cdot \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h}$$

$\Delta r \to 0$ の極限では

$$S = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h}$$
$$= \pi r h \cdot \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h}$$
$$= \pi r \sqrt{r^2+h^2}$$

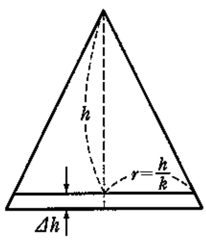
これで側面積はうまく求まった.

次に底面積を求めてみよう.こちらはずっと簡単である.

$r=\dfrac{h}{k}$ として円錐の体積を高さ h のみの関数と考えると,

$$V(h) = \frac{1}{3k^2}\pi h^3$$

となる.



これを h で微分すると,

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{k^2}\pi h^2$$
$$= \pi r^2$$

となる.

これは底面の円の面積である.

底面積の方が側面積よりも簡単に求まるのは,高さ h が底面に垂直だからである.

この後,立体に内接する球を考えて全表面積を同時に求める方法を示す.内接球を考える理由は,その半径が常に表面と垂直だからである.

(III) 内接球をもつ多面体についての定理

[定理 1-1]

ある多面体がそのすべての面に内接する球をもつとき,その体積 V は内接球の半径 r の関数として表すことができ,半径 r の変化にともなって,この多面体が相似形を保つと仮定すれば,体積 $V(r)$ を内接球の半径 r で微分すると全表面積 $S(r)$ が得られる.すなわち

$$\frac{dV(r)}{dr} = S(r)$$

となる.

〔証明〕

多面体の各面の面積を S_1, S_2, S_3, …, S_n とする.いま S_1 に注目して,底面が S_1 で高さが r である角錐を考える.(II)で円錐の底面積を求めたが,これと全く同じ方法が角錐でも成り立つ.つまり角錐の体積を $V_1(r)$ とすると,

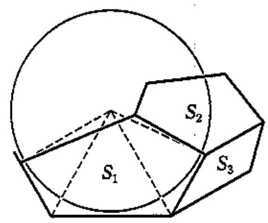
$$V_1(r) = \frac{1}{3} r S_1$$

と表せる.仮定により,半径 r が変化するとき,底面積も相似形に変化するから,底面積は r^2 に比例する.

$S_1 = k_1 r^2$

(k_1 は比例定数)

$$V_1(r) = \frac{1}{3} k_1 r^3$$



これを r について微分すると

$$\frac{dV_1(r)}{dr} = k_1 r^2 = S_1$$

同様に

$$\frac{dV_2(r)}{dr} = k_2 r^2 = S_2$$

……

$$\frac{dV_n(r)}{dr} = k_n r^2 = S_n$$

これらの左辺と右辺をそれぞれ加え合わせると,

$$\frac{d(V_1 + V_2 + \cdots\cdots + V_n)}{dr} = S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_n$$

問題の多面体は各面と内接球の中心を結ぶ n 個の角錐に区分されるから,上の式はこの多面体の体積を内接球の半径で微分したときに全表面積が得られることを示している. (証明終)

この定理は積分の形式でも述べることができる.

> [定理 1-2]
> ある多面体がそのすべての面に内接する球をもつとき，その全表面積 S は内接球の半径 r の関数として表すことができ，半径 r の変化にともなって，この多面体が相似形を保つと仮定すれば，全表面積 $S(r)$ を内接球の半径 r で積分すると体積が得られる．すなわち
> $$\int_0^r S(t)dt = V(r)$$
> となる.

証明は $r=0$ のとき $V(r)=0$ であることを使えば定理 1-1 より明らかである.

上の 2 つの定理は内接球をもつ多面体について，体積 $V(r)$，全表面積 $S(r)$ と内接球の半径 r が 1 つの関係式で結ばれていることを示している．そこで次のような定理も成り立つ.

> [定理 1-3]
> 内接球をもつ多面体の体積 V と全表面積 S が長さの単位をもつある 1 つの変数 a の関数としてすでに求まっている場合，この多面体が内接球の半径 r の変化にともなって相似形を保ち，変数 a が内接球の半径 r に比例すると仮定すれば，内接球の半径 r をこの変数 a で表すことができる.

[証明]

仮定より，a が半径 r に比例するから，

$$a=kr \quad (k \text{ は比例定数}) \quad \cdots\cdots ①$$

とおいて，$V(a)$ と $S(a)$ を半径 r の関数として表したものを $V(kr)$，$S(kr)$ とすれば，定理 1-1 より

$$\frac{dV(kr)}{dr}=S(kr) \quad \cdots\cdots ②$$

相似形が保たれるという仮定より，体積 $V(kr)$ は k^3r^3 に比例し，これを r で微分した左辺は k^3r^2 に比例する．また右辺は全表面積だから k^2r^2 に比例する．そこで②は

$$Ak^3r^2=Bk^2r^2$$

(A，B は k や r に関係しない定数)

となり，$k \neq 0$，$r \neq 0$ として，両辺を k^2r^2 で割って，k を求めると，

$$k=\frac{B}{A}$$

を得る．これを①に代入して，r を a の関数として表し，

$$r=\frac{A}{B}a$$

が求まる. (証明終)

この定理 1-3 は正多面体の 1 辺の長さを a として，内接球の半径 r を求める問題に応用できる.
次の節では正多面体への応用を考えてみる.

(IV) 正多面体への応用

はじめに立方体で定理 1-1 が成り立つことを確認してみよう.
立方体の 1 辺の長さを a とすると，体積 V は

$$V=a^3$$

であり，内接球の半径 r は

$$r=\frac{a}{2}$$

であるから，

$$V=(2r)^3=8r^3$$

これを半径 r で微分すると，

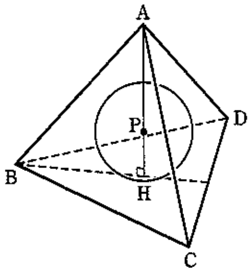
$$\frac{dV}{dr}=24r^2$$
$$=24\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=6a^2$$

この $6a^2$ は立方体の全表面積である.
よって立方体で定理 1-1 が成り立つ.

次に正四面体について応用問題を解いてみよう.

> [問題 1] 正四面体の 1 辺の長さを a として次の各問いに答えよ.
> (1) 全表面積を a で表せ.
> (2) 体積を a で表せ.
> (3) 内接球の半径 r と a が比例すると仮定して，定理 1-3 の考え方によって半径 r を a で表せ.
> (4) 四面体の頂点を A，B，C，D，重心を G とすると，位置ベクトルを使って
> $$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$$
> が成り立つ.
> これを用いて内心 P と重心 G が一致することを証明せよ.

[解答例]



(1), (2)は途中の計算を省略して答えのみ示す。

(1) 全表面積は

$$S(a)=\sqrt{3}\,a^2$$

(2) 体積は

$$V(a)=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

(3) 仮定より，a が r に比例しているので

$$a=k\cdot r \qquad (k\text{ は比例定数}) \quad \cdots\cdots ①$$

これを (1), (2) の結果に代入すると

$$S(kr)=\sqrt{3}\,k^2r^2 \qquad V(kr)=\frac{\sqrt{2}}{12}k^3r^3$$

定理 1-1 より，$\dfrac{dV(kr)}{dr}=S(kr)$ であるから，

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot k^3\cdot 3r^2=\sqrt{3}\,k^2r^2$$

この式から比例定数 k を求めると，$k\neq 0$ として

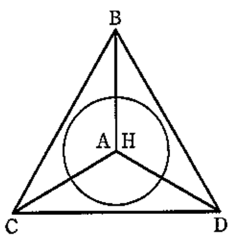
$$k=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{6}$$

これを①に代入して，求める内接球の半径は

$$r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

となる。

(4) 正四面体とそれに内接する球を頂点Aの方向から底面 BCD に垂直に投影した図を右に示す。



点Hを △BCD の重心とすると，正四面体の対称性により次のことが明らかである。

(i) 線分 AH は平面 BCD に垂直である。

(ii) 内心Pは線分 AH 上にある。

問題より，正四面体の重心Gについて

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

であるが，位置ベクトルの始点Oを点Aと一致させても一般性は失われない。

②より $$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{4} \quad \cdots\cdots ③$$

一方，点Hは △BCD の重心であるから，

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3} \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立ち，③と④から

$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AH} \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤は重心Gが線分 AH 上にあり，線分 AH を 3：1 に内分する点であることを示している。

線分 AH の長さは三平方の定理を 2 度使って簡単に

$$|\overrightarrow{AH}|=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

と求まるが，⑤より

$$|\overrightarrow{GH}|=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

よって，重心から平面 BCD までの距離 GH と，(3)で求めた内接球の半径 r=PH が一致する。

また(ii)により，内心Pは重心Gと同様に線分 AH 上にあるから，重心Gと内心Pは一致する。

(証明終)

正八面体，正十二面体，正二十面体などについても，同じような応用問題を考えることができる。

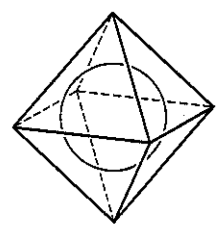
この問題を作るにあたって，ブルーバックスの「現代数学百科」p.403 を参考にした。

[問題 2] 正八面体の 1 辺の長さを a として次の各問いに答えよ。

(1) 全表面積を a で表せ。

(2) 体積を a で表せ。

(3) 内接球の半径 r と a が比例すると仮定し，定理 1-3 を用いて半径 r を a で表せ。



[問題 3] 正十二面体の 1 辺の長さを a とすると，全表面積は正五角形の面積の 12 倍で，

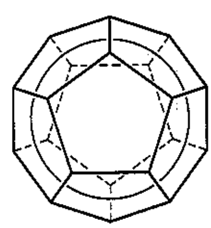
$$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$$

である。

また内接球の半径 r は

$$r=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}\,a$$

である。定理 1-2 を用いて正十二面体の体積を求めよ。



> [問題 4] 正二十面体の1辺の長さを a とすると，全表面積は正三角形の面積の 20 倍で，$5\sqrt{3}a^2$ である．また体積は $\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$ である．
> 定理 1-3 を用いて正二十面体に内接する球の半径を求めよ．

解答は各自で試みていただきたい．ここでは答えのみ示しておく．

[問題 2 の答]

(1) $2\sqrt{3}a^2$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{6}a$

[問題 3 の答] $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$

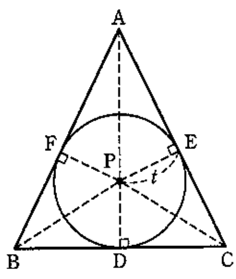
[問題 4 の答] $\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}a$

次の節では正多面体以外の内接球をもつ立体として円錐をとりあげる．円錐は無数の面をもつ多面体と考えることができる．この場合にも定理 1-1 が成り立つことを確かめてみよう．

(V) 円錐への応用

先に (II) において，円錐の体積を底面の半径や高さについて微分することによって，側面積と底面積を，個々に求める方法を考えたが，ここでは定理 1-1 を用いて全表面積を同時に求めてみよう．底面の半径を r，高さを h の直円錐を考える．

内接球の半径を t としてこの円錐を真横から見た図を右に示す．



直円錐を真横に投影すると，内接球の半径 t は $\triangle$ABC の内接円の半径に等しい．

三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times 2r\times h$$

であるが，これは $\triangle$ABP，$\triangle$BCP，$\triangle$CAP の面積の和に等しい．つまり

$$rh=\frac{1}{2}t(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{r^2+h^2}+2r)t$$

となる．

これを t について解いて，有理化すると

$$t=\frac{r}{h}(\sqrt{r^2+h^2}-r) \quad \cdots\cdots ①$$

これで内接球の半径 t を r と h の式で表すことができた．

また変数 t の変化に対して直円錐が相似形を保つと仮定すると，r が h に比例するので

$$r=kh \quad (k \text{ は比例定数}) \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

②を①に代入して，$h>0$ を使って整理すると

$$t=kh(\sqrt{k^2+1}-k) \quad \cdots\cdots ③$$

これを h について解くと

$$h=\frac{\sqrt{k^2+1}+k}{k}t \quad \cdots\cdots ④$$

これで準備が整った．ここで定理 1-1 を使う．

円錐の体積 V は②を代入して

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$=\frac{1}{3}\pi(kh)^2 h$$

$$=\frac{\pi}{3}k^2h^3$$

となる．これを内接球の半径 t について微分すると，合成関数の微分法を使って

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$=\pi k^2h^2\cdot\frac{\sqrt{k^2+1}+k}{k}$$

$$=\pi h^2(\sqrt{k^2+1}+k)k$$

これに②より $k=\frac{r}{h}$ を代入し，少し計算すると

$$\frac{dV}{dt}=\pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2$$

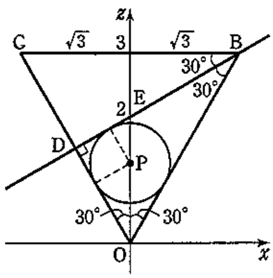
が得られる．

右辺の第 1 項が側面積であり，第 2 項が底面積であるから直円錐の場合にも定理 1-1 が成り立つことが示された．

計算の割にあたりまえの結果しか出ず，生産性の高い議論ではなかったが，とにかく表面が平面でなく，曲面である場合でも定理 1-1 が適用できる例が 1 つ見出されたことになる．

最後に直円錐を斜めに切って得られる底面が楕円の立体の表面積を求める問題を解いてみよう．

[問題5] 右の図は底面の半径 $\sqrt{3}$，高さ3の逆立ちした直円錐を真横から見たものである．点Bを通って，y軸に平行で，x軸と30°で交わる平面で切断したとき，



下側の立体つまり，底面がBDを長軸とする楕円である錐について，次の問いに答えよ．

(1) 直円錐の側面の方程式を x，y，z を使って表せ．

(2) 切断する平面の方程式を x，z を使って表せ．

(3) 底面の楕円の面積 S とこの楕円錐の体積 V を求めよ．

(4) 楕円錐の内接球の半径 r を求め，その側面積を求めよ．

[解答例]

(1) 直円錐の側面は z の増加に比例して半径が大きくなる円の集合体と考えられる．

z が3のとき，その半径は $\sqrt{3}$ であるから，求める方程式は

$$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}z\right)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$(0\leqq z\leqq 3)$ である．

(2) 求める平面の方程式は zx 平面では直線の方程式となり，傾きが $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$z$ 切片が2であるから

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}}x+2 \qquad \cdots\cdots ②$$

(3) ②を①に代入して楕円の方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の形に整理すると，

$$\frac{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．この楕円の方程式は底面の楕円そのものではなく，この楕円を z 軸方向から垂直に xy 平面に射影したものである．③での長軸の長さは $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ であるが，楕円錐底面の楕円の長軸の長さはその $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍で $2a=3$ となる．これは線分BDの長さである．断面が y 軸と平行であるから，底面の楕円の短軸も y 軸と平行である．

一方，③の楕円の短軸も y 軸と平行であるから，その長さは射影で変化せず $2b=\sqrt{6}$ となる．

よって，求める楕円錐の底面の面積は楕円の面積の公式により

$$\pi ab=\pi\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{4}\pi$$

また楕円錐の高さが図より $\sqrt{3}$ であり，求める体積は

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{6}}{4}\pi\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

である．

(4) 問題の図のように，内接球の中心をP，切断面と z 軸の交点をEとする．

楕円錐に内接する球の半径 r は，△BDOに内接する円の半径と等しく，

$$\mathrm{OE}=\mathrm{OP}+\mathrm{PE}$$

$$2=2r+\frac{2}{\sqrt{3}}r$$

これより，

$$r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

が得られる．これが内接球の半径である．

定理1-1を適用するために，この楕円錐と相似形の立体の体積 V と内接円の半径 r を変数 a を使って，

$$V=\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi a^3 \qquad r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}a$$

と表すと，全表面積 S は定理1-1より，

$$\begin{aligned}S&=\frac{dV}{dr}=\frac{dV}{da}\cdot\frac{da}{dr}\\&=\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi a^2\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3}\\&=\frac{3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{4}\pi a^2\end{aligned}$$

ここで $a=1$ とおくと

$$S=\frac{3\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{4}\pi$$

となり，これが楕円錐の全表面積である．

ゆえに，求める側面積はこれから底面積 $\frac{3\sqrt{6}}{4}\pi$ を引いて $\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi$ となる．

(VI) 終わりにあたって

ここで取り上げた立体以外にも，内接球をもついろいろな立体が考えられます．その中でも各辺の長さが異なる四面体は，常にすべての面に内接する球をもつという点で重要な立体であります．どんな多面体でも四面体の和で表せますので，平面図形の三角形同様，四面体についてよく知ることが多面体を理解する基本になります．定理1-1は内接球をもつという特別な立体に適用されるものですが，上記の理由により応用範囲は広がるものと考えられます．

また次元を1つ落として，2次元の平面図形に対しても同様な定理が成り立ちます．すなわち，内接円をもつ多角形の面積を内接円の半径rの関数で表し，これをrで微分するとこの多角形の全周の長さが求まるという定理です．証明は内接円の中心より多角形の各頂点に線を引き三角形の和に分解すればよいことで，この結果はそれほど目新しいものを生みません．しかし面積と全周といえばヘロンの公式が思い浮かびます．この証明に内接円が使われる理由が上の定理によりよく理解できます．

このレポートのテーマは古典数学の枠内に収まりますが，イメージとしてはベクトル解析のガウスの定理などを思い描いています．おそらくガウスの定理を極座標表示で表したときの特殊なケースが，この場合にあたるのではないかと想像しています．逆に，歴史的にはこのレポートのような発想からガウスの定理が生まれたのではないでしょうか．参考文献として，志賀浩二氏の「ベクトル解析30講」（朝倉書店）をあげておきます．

高校のレベルの数学では，オリジナルかどうかはあまり問わなくてもよいのではないかと私は考えています．どんなに易しい内容でも，自分独自の考えを進めていくことには，心地よい興奮をおぼえます．いままでの高校数学の授業では，このような内容を授業で扱うことは不可能でありましたが，高校数学も新しいタイプの学校が創設されるにともなって変革の時期にきています．総合学科高校は選択の幅を広げすぎて，基礎学力を軽視しているという欠点をもっていて，私には賛成できません．しかし数学史や課題研究など，教科書の範囲を飛び出して教えることのできる教科もあって，これには魅力を感じます．普通科の高校では受験がネックになって，オリジナルな教材の授業や生徒に課題を与えて研究させる形式の授業が今まではなかなか進まなかったのですが，このような変革の流れは徐々に波及するものと思われます．数学科の教師が協力して，その学校独自の教科書を作り上げていくことも現実味を帯びてきました．それにしても教師は日々の雑用が多すぎます．教師が自由な雰囲気の中で，いろいろと工夫して教材研究に打ち込める余裕がある学校から，未来に羽ばたく創造性豊かな生徒たちが育っていくのではないかと考えます．そのためには数学の枠のなかに閉じこもってばかりいたのではいけないと思っています．文部科学省や県による改革ばかりに頼らず，学校現場の教師が協力して改革の青写真を作り上げていってはどうでしょうか．

終わりにあたって，ここまでこのレポートを読んでいただいた読者の方々に感謝いたします．下記のメールアドレスに，このレポートについてのご意見やご感想をお寄せいただければ幸いです．

メールアドレス　yrm00011@nifty ne. jp

（千葉県立姉崎高等学校）