2次行列を考える

高橋(たかはし)　敏雄(としお)

1. はじめに

2次行列については，教科書レベルをここに述べようとは思わない．では，何をここで論じようとするのか．以前から，私は次の2点について疑問を抱いていた．(x，y，x'，y' は実数，i は虚数単位とする．)

(1) 点 P(x，y)を原点Oのまわりに θ だけ回転して得られる点を Q(x'，y')とおくと，

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta-y\cos\theta \end{cases}$$

すなわち，行列で表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(*)$$

(2) 点 $Z(=x+yi)$ を原点Oのまわりに θ だけ回転して得られる点を $Z'=x'+y'i$ とおくと，

$$x'+y'i=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+yi) \quad \cdots\cdots(**)$$

で表される．

この(*)，(**)は何らかの関係があるのか．もしあるとすれば，それはどういう関係なのか．という私の素朴な疑問に答える書物は今のところない．ただ，(**)から，

$$\begin{aligned} x'+y'i&=(\cos\theta+i\sin\theta)(x+yi) \\ &=x\cos\theta+ix\sin\theta+iy\cos\theta+i^2y\sin\theta \\ &=(x\cos\theta-y\sin\theta)+i(x\sin\theta+y\cos\theta) \end{aligned}$$

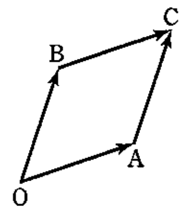
よって，$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$ により，(*)が導かれる．しかし，何かピンとするものがない．
同じように，

$$a+bi \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

とする対応も，よく知られた事柄である．やはり，何故かということがどうしても脳裏を離れないのである．一体2次行列というものは何であるのか．

そこでこの問題を自らに課し，約1年間の熟考の後に完成させたのが本稿である．

2. ベクトルの和，実数倍



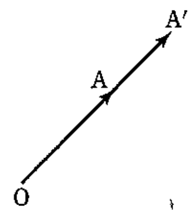
2つのベクトルを

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とする．ここに平行四辺形 OACB を作ると，

$$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

となる．



よって，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ であるとは言えない．
これは約束事なのである．
$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ と定めるのである．

また，OA：OA$'$＝1：k とすると，

$$\overrightarrow{OA'}=\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

となる．$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$ は約束事である．
ベクトルの和，実数倍を次のように定めることになる．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

ここで，私が言いたいのは，何が約束事かを見極めることである．

3. 2次行列と1次変換

2点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ があり，変換 $f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を考える．このとき，

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

が成り立つとき，変換 f を1次変換と言う．さて，ベクトルで表現すると，

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

となる．一方，行列で表現すると，

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

であることは，周知のとおりである．まだ，この段階では行列の演算はされていないと考えて話をすすめていく．ベクトル表現と行列表現は等しいから，

$$x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

が成り立つことになる．

ここで，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とおくと，

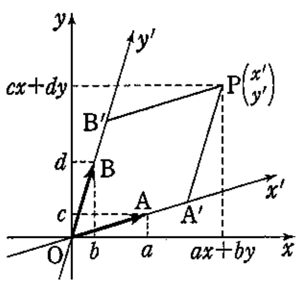
$$x\vec{a}+y\vec{b}=(\vec{a}\quad\vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

と表すことができる．

このことから，1次変換の図形的意味を考える．

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{OA'}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{OB'}=y\vec{b}$ とすると，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$
$\quad=x\vec{a}+y\vec{b}$



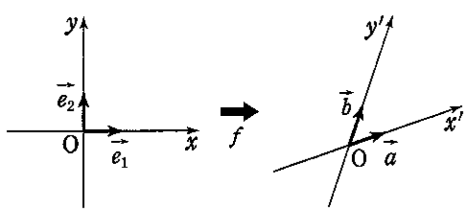
となるから，1次変換の行列表現は，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を x' 軸，y' 軸の方向ベクトルにそれぞれとる斜交座標とみることができるようだ．もう一度，1次変換を考えてみる．

x 軸，y 軸の基本ベクトルを $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ とする．

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$ に対して，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と言うことができるから　$f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

また，同じように　$f: x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\to x\vec{a}+y\vec{b}$

これが，普通教科書に記載されていることである．



一方，行列では

$$f: x\vec{e_1}+y\vec{e_2}=(\vec{e_1}\quad\vec{e_2})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to x\vec{a}+y\vec{b}=(\vec{a}\quad\vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

とすることができる．とすれば，f によって

$(\vec{e_1}\quad\vec{e_2})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ は $(\vec{a}\quad\vec{b})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に移っていることになる．

したがって，1次変換というのは，xy-座標を $x'y'$-座標に移していると考えてよい．

行列 (＊　＊)
　　 ↓　 ↓
　 x 軸 y 軸

このときの，第1列ベクトルが x 軸，第2列ベクトルが y 軸にとったものが，行列の意味，あるいは図形的な意味ととることができる．

今後 xy-座標系は，普通我々が使っている直交座標と考える．そして，1次変換によって移った座標系を $x'y'$-座標としてとる．

$-180°<\theta\leqq 180°$ を満たす θ がある．x' 軸を原点Oの周りに θ 回転させて y' 軸に重なったとする．

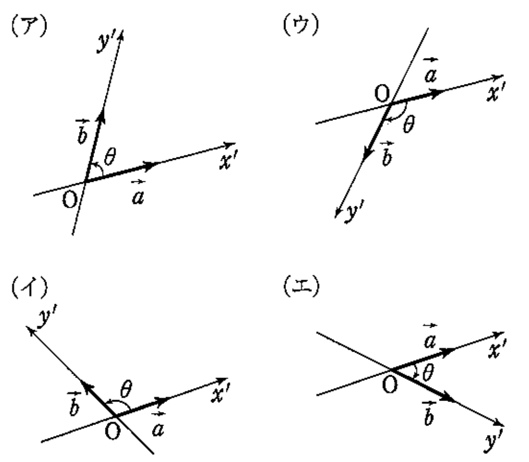
(i)　$0°<\theta<180°$ のとき
　　$x'y'$-座標系を正の座標系
　　((i)の(ア)，(イ))

(ii)　$-180°<\theta<0°$ のとき
　　$x'y'$-座標系を負の座標系
　　((ii)の(ウ)，(エ))

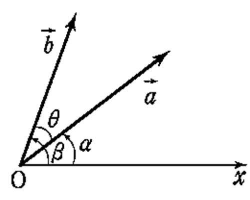
と呼ぶことにする．

(i)，(ii)を図に書くと，次のようになる．

(i)　正の座標系　　　　(ii)　負の座標系



では，どのようなときに，正の座標系，負の座標系になるのであろうか．$\vec{a}$，$\vec{b}$ が x 軸となす角が，それぞれ α，β とする．そして，$\theta=\beta-\alpha$ とおく．



$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とするとき，

$$\vec{a}=r\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix},\quad \vec{b}=s\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$$

(ただし，$r=\sqrt{a^2+c^2}$, $s=\sqrt{b^2+d^2}$)とおける．

$\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$, $\sin\alpha=\dfrac{c}{r}$, $\cos\beta=\dfrac{b}{s}$, $\sin\beta=\dfrac{d}{s}$ と表せるから，

$$\sin\theta=\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$
$$=\frac{d}{s}\cdot\frac{a}{r}-\frac{b}{s}\cdot\frac{c}{r}=\frac{ad-bc}{sr}$$

$\therefore\quad sr\sin\theta=ad-bc$

$r=|\vec{a}|$, $s=|\vec{b}|$ とも書けるので

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=ad-bc$$

この $ad-bc$ は，Aの行列式とか，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積とか呼ぶことができる．

すなわち，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して

$$|A|=\vec{a}\times\vec{b}=ad-bc$$

ところで，$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=ad-bc$ であるから，

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$ ($\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積)とすれば，

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\tan\theta=\vec{a}\times\vec{b}$ とすることもできるだろう．

以上から，次のことがわかる．

正の座標系 $\Longleftrightarrow$ $0°<\theta<180°$

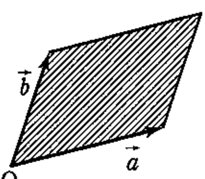
$\Longleftrightarrow$ $\sin\theta>0$ $\Longleftrightarrow$ $|A|>0$

負の座標系 $\Longleftrightarrow$ $-180°<\theta<0°$

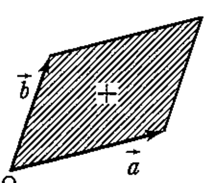
$\Longleftrightarrow$ $\sin\theta<0$ $\Longleftrightarrow$ $|A|<0$

ところで，$|A|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ とおけるが，

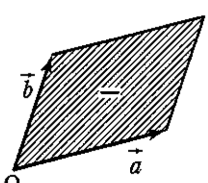
$\|A\|=|\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|=|ad-bc|$ とすれば，この値は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ によって作られるところの平行四辺形の面積と言うことができる．



$\|A\|>0$



$|A|>0$



$|A|<0$

ここに述べた事柄は，一般に知られたことである．ただ，座標系と行列が対応しているという認識は，おそらく少ないのではないかと思う．

xy-座標系を表す行列は $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ であり，変換 f によって移された $x'y'$-座標系(x_Ay_A-座標系)を表す行列が $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ となる．

また，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ において，点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は行列 A で表される座標系上の点であり，

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ だから，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ は直交座標系上の点である．その2点が一致している．

ということを，まずここで確認をしてもらいたいのである．

4. 2次行列の演算

ここではベクトルの演算は成り立つとし，行列演算を作りあげていく過程であると見ていただきたい．

2つの行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}$ がある．

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}e\\g\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}f\\h\end{pmatrix}$ とおくと，

$A=(\vec{a}\ \ \vec{b})$, $B=(\vec{c}\ \ \vec{d})$ と書ける．

[1] 相等

$$A=B \Longleftrightarrow \vec{a}=\vec{c} \text{ かつ } \vec{b}=\vec{d}$$

(証明) $\vec{a}=\vec{c}$ かつ $\vec{b}=\vec{d}$ が成り立つとき $A=B$,

そして $A=B \Longrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は明らかに成り立つ．

逆に $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x\vec{c}+y\vec{d}$$

$x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}e\\g\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}f\\h\end{pmatrix}$ から

$$\begin{cases}ax+by=ex+fy\\cx+dy=gx+hy\end{cases}$$

この2つの等式は x, y についての恒等式となるから，

$$a=e,\ b=f \text{ かつ } c=g,\ d=h$$

$\therefore\quad \vec{a}=\vec{c}$ かつ $\vec{b}=\vec{d}$

[2] 和および差

$$A+B=(\vec{a}+\vec{c} \quad \vec{b}+\vec{d})$$
$$A-B=(\vec{a}-\vec{c} \quad \vec{b}-\vec{d})$$

(解説) 証明というより，定めることになる.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(\vec{a} \quad \vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(\vec{c} \quad \vec{d})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
$$=(x\vec{a}+y\vec{b})+(x\vec{c}+y\vec{d})$$
$$=x(\vec{a}+\vec{c})+y(\vec{b}+\vec{d})$$
$$=(\vec{a}+\vec{c} \quad \vec{b}+\vec{d})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ここで，$A+B=(\vec{a}+\vec{c} \quad \vec{b}+\vec{d})$ と定めると，

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A+B)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が成り立つ.

同様に　$A-B=(\vec{a}-\vec{c} \quad \vec{b}-\vec{d})$,

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A-B)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

[3] 実数倍

$$kA=(k\vec{a} \quad k\vec{b})$$

(解説) 証明というより，定めることになる.

$$k\left\{A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=k(x\vec{a}+y\vec{b})=x(k\vec{a})+y(k\vec{b})$$
$$=(k\vec{a} \quad k\vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ここで，$kA=(k\vec{a} \quad k\vec{b})$ と定める.

$k\left\{A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=(kA)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が成り立つ.

また，$A\left\{k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}=kx\vec{a}+ky\vec{b}$

$$=xk\vec{a}+yk\vec{b}$$
$$=(k\vec{a} \quad k\vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

も成り立つから，

$$k\left\{A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=A\left\{k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=(kA)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

[4] 積

(1) $A(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}$

(証明) $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ とおく.

$$A(\vec{x}+\vec{y})=A\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}=(x_1+y_1)\vec{a}+(x_2+y_2)\vec{b}$$
$$=(x_1\vec{a}+x_2\vec{b})+(y_1\vec{a}+y_2\vec{b})$$
$$=(\vec{a} \quad \vec{b})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+(\vec{a} \quad \vec{b})\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$
$$=A\vec{x}+A\vec{y}$$

(2) $AB=A(\vec{c} \quad \vec{d})=(A\vec{c} \quad A\vec{d})$

(証明) (1)を利用して

$$A\left\{B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=A(x\vec{c}+y\vec{d})=xA\vec{c}+yA\vec{d}$$
$$=(A\vec{c} \quad A\vec{d})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$AB=(A\vec{c} \quad A\vec{d})$ と定めると，

$A\left\{B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=(AB)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が成り立つ.

[5] 性質

(1) $(k+l)A=kA+lA$

(証明) $(k+l)A=(k+l)(\vec{a} \quad \vec{b})$

$$=((k+l)\vec{a} \quad (k+l)\vec{b})$$
$$=(k\vec{a}+l\vec{a} \quad k\vec{b}+l\vec{b})$$
$$=(k\vec{a} \quad k\vec{b})+(l\vec{a} \quad l\vec{b})$$
$$=k(\vec{a} \quad \vec{b})+l(\vec{a} \quad \vec{b})=kA+lA$$

(2) $k(A+B)=kA+kB$

(証明) $k(A+B)=k(\vec{a}+\vec{c} \quad \vec{b}+\vec{d})$

$$=(k(\vec{a}+\vec{c}) \quad k(\vec{b}+\vec{d}))$$
$$=(k\vec{a}+k\vec{c} \quad k\vec{b}+k\vec{d})$$
$$=(k\vec{a} \quad k\vec{b})+(k\vec{c} \quad k\vec{d})$$
$$=k(\vec{a} \quad \vec{b})+k(\vec{c} \quad \vec{d})=kA+kB$$

(3) $(AB)C=A(BC)$

(証明) $C=(\vec{e} \quad \vec{f})$ とおく.

$$(AB)C=(AB)(\vec{e} \quad \vec{f})$$
$$=((AB)\vec{e} \quad (AB)\vec{f})$$
$$A(BC)=A(B\vec{e} \quad B\vec{f})$$
$$=(A(B\vec{e}) \quad A(B\vec{f}))$$
$$=((AB)\vec{e} \quad (AB)\vec{f})$$

$\therefore$　$(AB)C=A(BC)$

(4) $(A+B)C=AC+BC$

(証明) $(A+B)C=((A+B)\vec{e} \quad (A+B)\vec{f})$

$$=(A\vec{e}+B\vec{e} \quad A\vec{f}+B\vec{f})$$
$$=(A\vec{e} \quad A\vec{f})+(B\vec{e} \quad B\vec{f})$$
$$=A(\vec{e} \quad \vec{f})+B(\vec{e} \quad \vec{f})$$
$$=AC+BC$$

(5) $A(B+C)=AB+AC$

(証明) $A(B+C)=A(\vec{c}+\vec{e} \quad \vec{d}+\vec{f})$

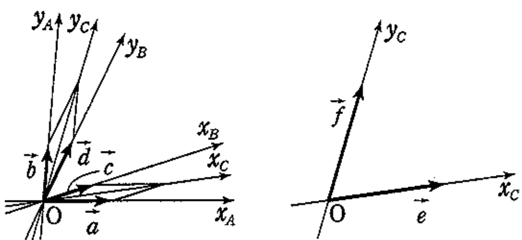
$$=(A(\vec{c}+\vec{e}) \quad A(\vec{d}+\vec{f}))$$
$$=(A\vec{c}+A\vec{e} \quad A\vec{d}+A\vec{f})$$
$$=(A\vec{c} \quad A\vec{d})+(A\vec{e} \quad A\vec{f})$$
$$=A(\vec{c} \quad \vec{d})+A(\vec{e} \quad \vec{f})$$
$$=AB+AC$$

ここに示した２次行列の性質は，すべて１次変換の行列表現と，ベクトルの演算により導いてきたものである．本来，行列の演算については，はじめに約束があり，それを使って１次変換をスムーズに説明していくものである．しかし，ここでは，はじめに行列の計算があるのではなく，ベクトルの演算を用いてその計算法を作りあげているのである．したがって，行列の演算は座標系の演算と言うことができる．

5. ２次行列の演算と座標系

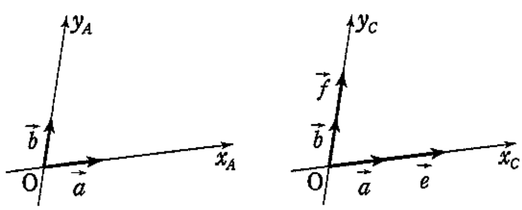
x_Ay_A-座標系，x_By_B-座標系，x_Cy_C-座標系を表す行列をそれぞれ $A=(\vec{a}\ \ \vec{b})$, $B=(\vec{c}\ \ \vec{d})$, $C=(\vec{e}\ \ \vec{f})$ とおく．

(1) $A+B=C$ $\qquad$ $\vec{e}=\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{f}=\vec{b}+\vec{d}$



x_Cy_Cー座標系

(2) $kA=C$ $\qquad$ $\vec{e}=k\vec{a}$, $\vec{f}=k\vec{b}$



x_Cy_Cー座標系

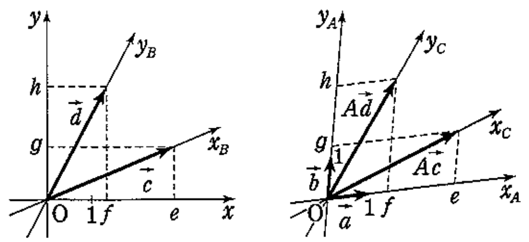
(3) $AB=C$

$AB=A(\vec{c}\ \ \vec{d})=(A\vec{c}\ \ A\vec{d})$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とすると

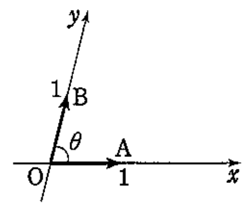
$$A\vec{c}=(\vec{a}\ \ \vec{b})\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}=e\vec{a}+g\vec{b}$$

$$A\vec{d}=(\vec{a}\ \ \vec{b})\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}=f\vec{a}+h\vec{b}$$



以上，２次行列は座標系の２つの軸を表しているという例を示してきた．

ところで，一般に斜交座標を表す行列は，右図から

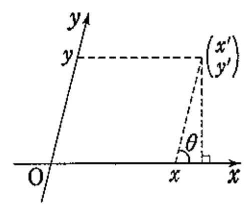


$\overline{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

で表されるので，

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$$

であることが分かる．



一方，斜交座標の任意の点の座標を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{cases} x'=x+y\cos\theta \\ y'=\quad\ \ y\sin\theta \end{cases}$ より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，この行列は $\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix}$ となり，一致するのである．

6. 余因子行列

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\overline{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ をAの余因子行列と言う．

$$A+\overline{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$$

$$=(a+d)I \qquad ただし，I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\overline{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=(ad-bc)I$$

ここに出てきた $a+d$ をAのトレース，$ad-bc$ はAのデターミナントという．

$\overline{A}$ には次の性質がある．

(1) $\overline{\overline{A}}=A$, $|\overline{A}|=|A|$ （証明は略）

(2) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$　　$\overline{A-B}=\overline{A}-\overline{B}$

(証明)　$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$\therefore$　$\overline{A+B}=\begin{pmatrix} d+h & -b-f \\ -c-g & d+h \end{pmatrix}$

$\overline{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\overline{B}=\begin{pmatrix} h & -f \\ -g & e \end{pmatrix}$ より,

$\overline{A}+\overline{B}=\begin{pmatrix} d+h & -b-f \\ -c-g & a+e \end{pmatrix}$ となるから,

$$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$$

$\overline{A-B}=\overline{A}-\overline{B}$ も同様に証明できる.

(3) $\overline{kA}=k\overline{A}$　(証明は略)

(4) $\overline{AB}=\overline{B}\,\overline{A}$

(証明)　$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$\therefore$　$\overline{AB}=\begin{pmatrix} cf+dh & -af-bh \\ -ce-dg & ae+bg \end{pmatrix}$

$\overline{B}\,\overline{A}=\begin{pmatrix} h & -f \\ -g & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} cf+hd & -bh-af \\ -gd-ce & gb+ae \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} cf+dh & -af-bh \\ -ce-dg & ae+bg \end{pmatrix}$$

$\therefore$　$\overline{AB}=\overline{B}\,\overline{A}$

これから $\overline{A^n}=(\overline{A})^n$ が成り立つ.

(5) $(\overline{P}AP)^n=|P|^{n-1}\overline{P}A^nP$

(数学的帰納法で証明できる)

(6) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=O$

(ケーリー=ハミルトンの定理)

(証明)　$A+\overline{A}=(a+d)I$

両辺にAを掛けて　　$A(A+\overline{A})=(a+d)A$

$\therefore$　$A^2+A\overline{A}=(a+d)A$

$\therefore$　$A^2-(a+d)A+|A|I=O$

(7) $(\overline{A})^{-1}=\overline{A^{-1}}$

(証明)　$A\overline{A}=|A|I$

ここで, $|A|\neq 0$ とすると $A\dfrac{\overline{A}}{|A|}=I$ より

$$A^{-1}=\frac{\overline{A}}{|A|}$$

よって　$\overline{A^{-1}}=\overline{\left(\dfrac{\overline{A}}{|A|}\right)}=\dfrac{A}{|A|}$

一方 $A\overline{A}=|A|I$ より, $\dfrac{A}{|A|}\overline{A}=I$ となるから

$$(\overline{A})^{-1}=\frac{A}{|A|}$$

$\therefore$　$(\overline{A})^{-1}=\overline{A^{-1}}$

その他の行列では, $A'=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, $A^\circ=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$

と定めると, A' はAの転置行列であるから, 性質は $\overline{A}$ と全く同じである. A° も $\overline{A}$ と同じであるが,

$$(AB)^\circ=A^\circ B^\circ$$

が成り立つ.

(証明)　$AB=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ より

$$(AB)^\circ=\begin{pmatrix} cf+dh & ce+dg \\ af+bh & ae+bg \end{pmatrix}$$

$$A^\circ B^\circ=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & g \\ f & e \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} cf+dh & ce+dg \\ af+bh & ae+dg \end{pmatrix}$$

$\overline{A}$, A', A° はいずれも, ここで深く考察することはやめる.

ただ, $A^*=(\overline{A})'=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ と定めても, A° と同じ性質をもっている.

また, $\overline{A}+A'=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ すなわち, 回転移動の1次変換になっている.

ただし, $\alpha=a+d$, $\beta=b-c$

さて, ここでは何を言いたかったか, それはAに対する逆行列 A^{-1} の意味は何であろうかということである. それは, 具体的例を巻末に載せるので, 参照してもらいたい. (図1～6)

7. 複素数と行列

複素数 $\alpha=a+bi$ (a, b は実数, i は虚数単位)とする. このとき, 複素数平面上での α は, 点Aを表す複素数を α とすると, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\alpha$ として考えても, 全く変わらない性質を持っている. すなわち, $\alpha=a+bi=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\beta=c+di=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ として,

和，差，実数倍はベクトルの場合と全く同じである．ただ異なるとすれば，ベクトルの始点は任意であるが，複素数の始点は常に原点であるということである．

$$\begin{aligned}\text{複素数：}\alpha\beta&=(a+bi)(c+di)\\&=\alpha(c+di)\\&=c\alpha+d(i\alpha)\\&=(\alpha\quad i\alpha)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

この表現は私の稿で扱ってきた方法であるから全く正当である．

$\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\beta$ であるから，

$$\alpha\beta=(\alpha\quad i\alpha)\beta$$

と書くこともできるはずである．では，即 $\alpha=(\alpha\quad i\alpha)$ とできるのか．

もしできるとしたら，$\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$i\alpha=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ より

$\alpha=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$ となり，冒頭で述べた

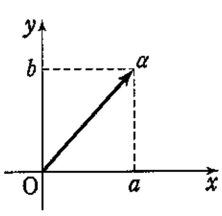
$$a+bi=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

が示されたことになる．では，正しいと言えるのか．$\alpha=a+bi$ は，普通我々は複素数平面上の点としてみてきた．ところが行列 $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$ はそれとは異なり，$\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$i\alpha=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ を座標系にもつ行列ということで，根本的に性質が異なるものを扱っていることになる．

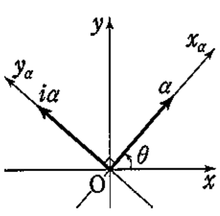
それ故に点が座標系に一致するということになり，とてもではないが現段階では $\alpha=(\alpha\quad i\alpha)$ とすることはできないと言えるのである．

$$\begin{aligned}Z'=\alpha Z&=\alpha(x+yi)\\&=x\alpha+yi\alpha\end{aligned}$$

ところで，α と $i\alpha$ は直交しているのだから，

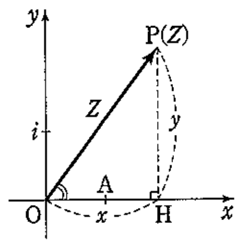


点 $\alpha=a+bi$

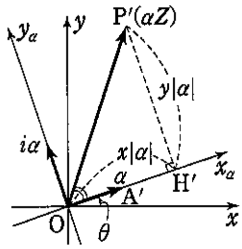


行列 $(\alpha\quad i\alpha)$ で表される座標系

したがって，αZ を図形的に表せば，



$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}=Z=x+yi)$



$\left(\begin{aligned}&\mathrm{OH'}=x\alpha,\ \mathrm{H'P'}=yi\alpha\\ \therefore\ &\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}+\overrightarrow{\mathrm{H'P'}}\\&\qquad=x\alpha+yi\alpha=\alpha Z\end{aligned}\right)$

上の図から　$\triangle\mathrm{OHP}\backsim\triangle\mathrm{OH'P'}$

$(\because\ \ \angle\mathrm{OHP}=90°=\angle\mathrm{OH'P'}$,

$\mathrm{OH}:\mathrm{OH'}=\mathrm{HP}:\mathrm{H'P'}=1:|\alpha|)$

この相似比は $1:|\alpha|$ となるから，

$$\mathrm{OP'}=|\alpha|\mathrm{OP},\ \angle\mathrm{POH}=\angle\mathrm{P'OH'}$$

点 $\mathrm{P'}(\alpha Z)$ は，点 $\mathrm{P}(Z)$ を原点のまわりに θ だけを回転させ，更に $|\alpha|$ 倍拡大（縮小）させたものになる．

複素数平面では，$a+bi=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とベクトルの成分として表現しても問題はないので，注意しながら話をすすめていきたい．先の記述でいくと，

$1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$i=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\alpha=a+bi=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a\cdot 1+bi$$

とおいてもよいであろう．

そうすると，$\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=(1\quad i)$，$J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=(i\quad -1)$ と書ける．

そこで，

$$a+bi\ \sim\ aI+bJ=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

の対応を考えてみたい．α はベクトルと考えると行列表現ができるから，

$$\alpha=a+bi=(1\quad i)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\ \sim\ aI+bJ=(\alpha\quad i\alpha)$$

よって，簡略化して　$\alpha=(1\quad i)\alpha\ \sim\ (\alpha\quad i\alpha)$

とすることができる．再三述べるように，左辺は点（複素数）であり，右辺は行列（座標系）であるから，単純に等しいと言えないことは何度も述べてきた．

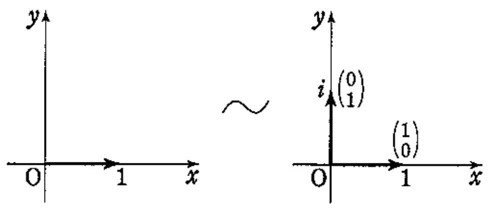
$\alpha \sim (\alpha \quad i\alpha)$, $\beta \sim (\beta \quad i\beta)$ とできるから，

$$\alpha+\beta \sim (\alpha+\beta \quad i(\alpha+\beta))=(\alpha \quad i\alpha)+(\beta \quad i\beta)$$
$$k\alpha \sim (k\alpha \quad ik\alpha)=k(\alpha \quad i\alpha)$$
$$\alpha\beta \sim (\alpha\beta \quad i\alpha\beta)=(\alpha \quad i\alpha)(\beta \quad i\beta)$$

が成り立つことは，すぐに分かることである．

次に，$1 \sim (1 \quad i)=I$，$i \sim (i \quad -1)=J$，$a+bi \sim aI+bJ$ を図で表現し，対応させながら考えていきたい．

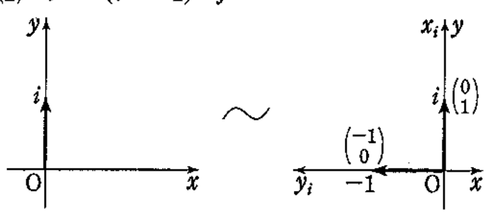
(1)　$1 \sim (1 \quad i)=I$



点 1　　行列 $(1 \ i)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

(x_1y_1－座標は xy－座標に一致)

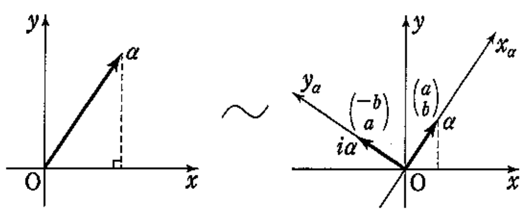
(2)　$i \sim (i \quad -1)=J$



点 i　　行列 $(i \ -1)=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

(x_iy_i－座標系は xy－座標系を 90° 回転させたもの)

(3)　$\alpha \sim (\alpha \quad i\alpha)$



点 $\alpha=a+bi$　　行列 $(\alpha \ i\alpha)=\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}$

複素数 α に対して，90° 回転させて $i\alpha$ は，附随して常に存在する．

点 α が生じると，すぐに $i\alpha$ を付けて，行列 $(\alpha \quad i\alpha)$ が生じるのである．

複素数 α の演算と，行列 $(\alpha \quad i\alpha)$ の演算も，共に構造として同型であるのは言うまでもないことである．もしも，点と行列の差異を除けば，$\alpha=(\alpha \quad i\alpha)$ としても，全く矛盾は生じないように思われる．クロネッカーは「自然数は神が創造した」と言ったと伝えられるが，たとえ虚数 i は人間が作ったとしても，$\alpha=a+bi$ から $i\alpha=-b+ai$ が，すでに直交しているという事実は，どう考えても人間の創造によるとも思えない．

そのような神秘を，私は強く感じている．

8. おわりに

2 次行列とは何であるのか，というテーマで話をすすめてきた．それは，2 つの軸をもった座標系を内蔵しているという点は，まさに Matrix である，ということができる．2 次行列は，ほとんど尽くされている．ソフト面では，ほぼ完璧であろう．しかし，ハード面が多少理解できないところもある．そう言う点から，今回このような論稿を提出してみた．

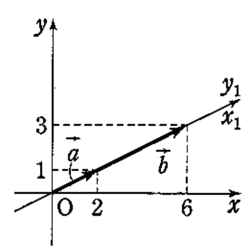
2 次行列の計算は，教科書レベルとしては分かり易い．しかし，1 次変換に至って理解が困難となることが多い．それは，次の 2 点にある．1 つは公理主義的展開をしているということ，もう 1 つは写像という概念を導入しているからであろう．この 2 点は，少々抽象的に考えをすすめていかなければならない．それ故に，1 次変換により，図形を移した場合，やや正確な理解ができていない，というデメリットがある．

例えば，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とあった場合，

$\begin{vmatrix}2 & 6\\1 & 3\end{vmatrix}=0$ であるから，$\begin{cases}x'=2x+6y\\y'=\ \ x+3y\end{cases}$ より

$$y'=\frac{1}{2}(2x+6y)=\frac{1}{2}x'$$

よって，平面上の点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は，直線 $y=\frac{1}{2}x$ に移される，と言うことができる．しかし，$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，



$\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ の座標系は直線 $y=\frac{1}{2}x$ 上にあるために区別がつかない状態にある，とすれば理解しやすい．つまり，2 つの座標軸は一致して，同一直線上にある．

ソフト面は，多様である．固有ベクトル，固有値の問題も，この図形的に見ていくのも面白いかもしれない．(巻末資料参照)
また，不動点，不動直線も図形的に明らかになっていくであろう．

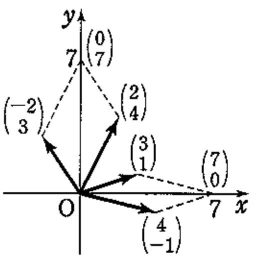
そして，複素数と行列の対応

$$a+bi \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ であろう．}$$

この問題を論じてみたが，充分であったかどうか．読者の意見を拝聴したい．

巻末資料

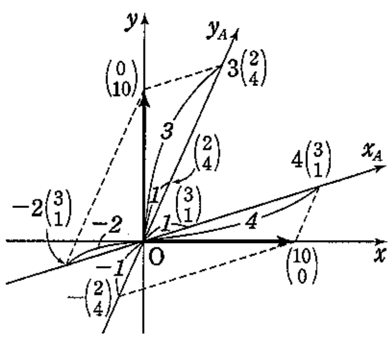
図 1



$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A+\overline{A}=7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

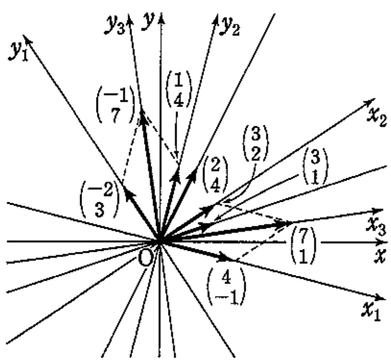
図 2



$$A\overline{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\left(4\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\quad -2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

図 3

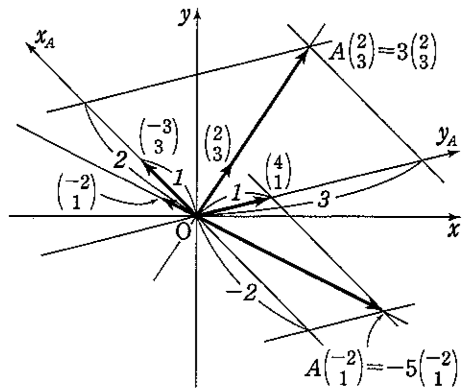


$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ から } \overline{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ A'=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}+A'=\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

このときの x 軸の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$，$y$ 軸の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ であるから，直交軸となっている．

図 4 〈固有値と固有ベクトル〉



$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ について

① $|A|=-3-12=-15<0$ より，行列 A は負の座標系

② $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\left\{A-k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$A-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-k & 4 \\ 3 & 1-k \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq 0$ とすると，$\begin{vmatrix} -3-k & 4 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix}=0$ より

$$(-3-k)(1-k)-3\cdot 4=0$$
$$k^2+2k-15=0$$
$$k=-5,\ 3$$

(i) $k=-5$ のとき

$$A-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$$

$\therefore\ x=-2y$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

(ii) $k=3$ のとき

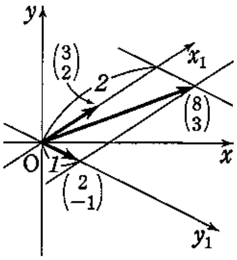
$$A-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(i)と同様にして $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

以上から　$k=-5,\ 3$ (固有値)

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ (固有ベクトル)

図 5



連立方程式

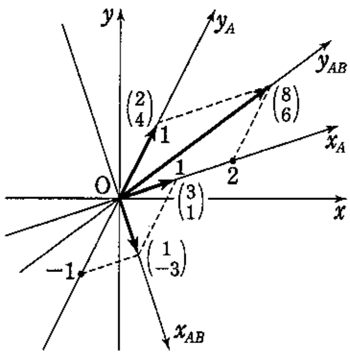
$$\begin{cases}3x+2y=8\\2x-y=3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

行列 $\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$ で表される座標系上の点 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と，直交座標 $\left(\text{行列}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ 上の点 $\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$ が一致するのが，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ のときということである。

図 6



$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$AB=\underset{\substack{\uparrow\\ x_Ay_A\text{-座標系}}}{\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}=\underset{\substack{\uparrow\\ x_{AB}y_{AB}\text{-座標系}}}{\begin{pmatrix}1 & 8\\-3 & 6\end{pmatrix}}$$

① $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ とする。

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \ \vec{b})$$

このベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，x_Ay_A-座標系上の基底

② $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ とするとき，$B=(\vec{c}\ \ \vec{d})$ は，x_By_B-座標系上の基底

$$x_A\text{座標}：\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\longrightarrow x\text{座標}：\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

$$y_A\text{座標}：\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\longrightarrow y\text{座標}：\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$$

$(x_Ay_A$-座標系$)$　　　　$(xy$-座標系$)$

（長崎県立諫早東高等学校）