2次方程式の解の公式導出について

坂本(さかもと)　茂(しげる)

数研通信 No.8 で編集部による「2次方程式の解の公式について」では解の公式を導く際の問題点を論じています．2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

において

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

と変形しますが，「因数分解利用」の場合は複素数の範囲でも問題ありません．

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

が成り立ち

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

となるからです．しかしこれは難しいということで現在の教科書では「平方根利用」で導かれています．$x^2=k$ の解が k の符号に関係なく $x=\pm\sqrt{k}$ であることを示しておいても

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

からの説明が面倒であると述べています．

$\sqrt{a^2}=|a|$ であり a が負のときは複号が入れ替わりますし，また複素数の場合は分数に対する根号の性質 $\sqrt{\frac{p}{q}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ を確かめる必要があります．

私は新学期一年生の指導において，次の説明を考えました．x^2 の項が平方数となるよう両辺に $4a$ を掛けて $4a^2x^2+4abx+4ac=0$ とし

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

を作ります．これは従来の平方式を $4a^2$ 倍しても得られます．そして

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

は複素数の場合でも問題はありません．したがって問題なく公式が導出されます．このような分数を避けた変形においては「因数分解利用」の場合でも有効であるばかりか式変形の難しさがなくなります．

No.8 では，1つの方法として $b^2-4ac<0$ の虚数解の場合は別に扱うことを提案しています．「因数分解利用」でも複素数において $\alpha\beta=0$ と $\alpha=0$ または $\beta=0$ が同値の性質を用います．根本的な問題は「複素数の定義」(拙著 No.17) が厳密でないことによります．$k>0$ のとき $\sqrt{-k}=\sqrt{k}\,i$ で定義しますが，不明確さがあるのは最初から $\sqrt{-k}$ のイメージが持たれるからでしょう．

(東京都立新宿高等学校)