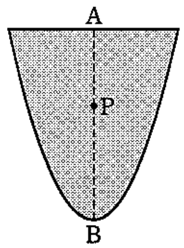
放物線の重心について

渋谷（しぶや）　勤（つとむ）

0. はじめに

高校生当時，放物線のグラフを上手に描けない私は，下図のような放物線の形の定規を作りました．プラスチックの下敷に，$y=x^2$ のグラフをマジックで描き，少し大きめにハサミで切り取り，サンドペーパーで仕上げます．

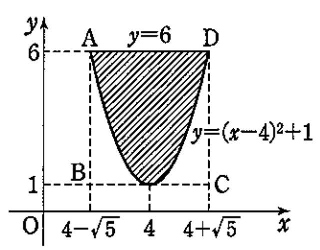


この自称“放物線定規”を人差し指の上に乗せると上手く釣り合うところがある．(図の点P)
(きっと放物線の重心はこの辺りだろう．)
AP：PB が 1：2 くらいに見えましたが，定規で測ると AP≒4.7cm，PB≒7.3cm．簡単な整数比になるとは思いませんでした．

1. 放物線の性質について

問題　2曲線 $y=(x-4)^2+1$，$y=6$ で囲まれた部分をそれぞれ y 軸，x 軸，直線 $y=-x$ の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ．

〔略解〕



(y 軸)　上図で斜線部分の面積 S は，それを囲んだ長方形 ABCD の面積の $\dfrac{2}{3}$ になる．(これは，

$\displaystyle\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ により示され，任意の放物線について成り立ちます．)

また，放物線は軸に対して左右対称であり，その重心は，軸上にある．求める体積を V_y とすると，パップス・ギュルダンの定理により，

$$\begin{aligned}V_y&=S\cdot 2\pi\cdot 4\\&=2\sqrt{5}\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi\cdot 4\\&=\frac{160}{3}\sqrt{5}\pi\end{aligned}$$

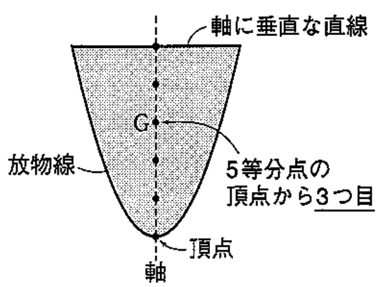
参考　**パップス・ギュルダンの定理**

面積 S の図形 X を，それと交わらない直線 l を軸に1回転してできる立体の体積 V について，X の重心と l との距離を d とすると

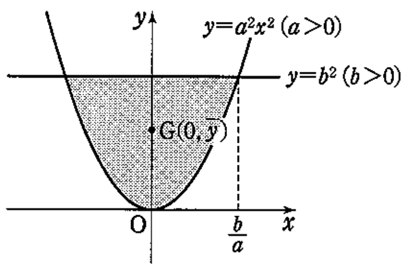
$$V=S\times 2\pi\times d$$

が成り立つ．

(x 軸，y＝−x)　この場合，パップス・ギュルダンの定理は，重心の位置が定まらないと使えません．しかし，放物線には多くの性質があります．もし，重心の位置が明らかになれば，体積は容易に求まります．そう考えて，放物線の重心を計算すると，次のことがわかりました．

> 任意の放物線について，下図の部分の重心は点Gである．
>
> 
>

〔証明〕

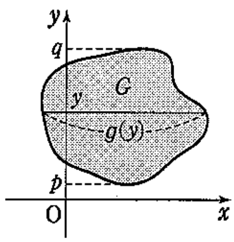


放物線 $y=a^2x^2$ $(a>0)$，直線 $y=b^2$ $(b>0)$ で囲まれた部分の面積を S，重心を $\mathrm{G}(0,\ \overline{y})$ とおく．

$$S=\frac{b}{a}\cdot 2\cdot b^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4b^3}{3a}$$

$$\overline{y}=\frac{\displaystyle\int_0^{b^2} y\cdot 2\frac{\sqrt{y}}{a}dy}{\dfrac{4b^3}{3a}}=\frac{3}{5}b^2$$ 〔証明終〕

参考 右の図のように閉曲線で囲まれた図形 G において，点 $(0,\ y)$ を通り x 軸に平行な直線が閉曲線によって切り取られる線分の長さが $g(y)$ で表されるとき，G の重心の y 座標は



$$\frac{\displaystyle\int_p^q yg(y)dy}{\displaystyle\int_p^q g(y)dy}$$ であることが知られている．

上の計算では，このことを利用しました．

このことにより，x 軸の周りに1回転させた体積 V_x は

$$V_x=S\cdot 2\pi(1+3)=V_y$$
$$=\frac{160}{3}\sqrt{5}\,\pi$$

直線 $y=-x$ の周りに1回転させた体積 V は

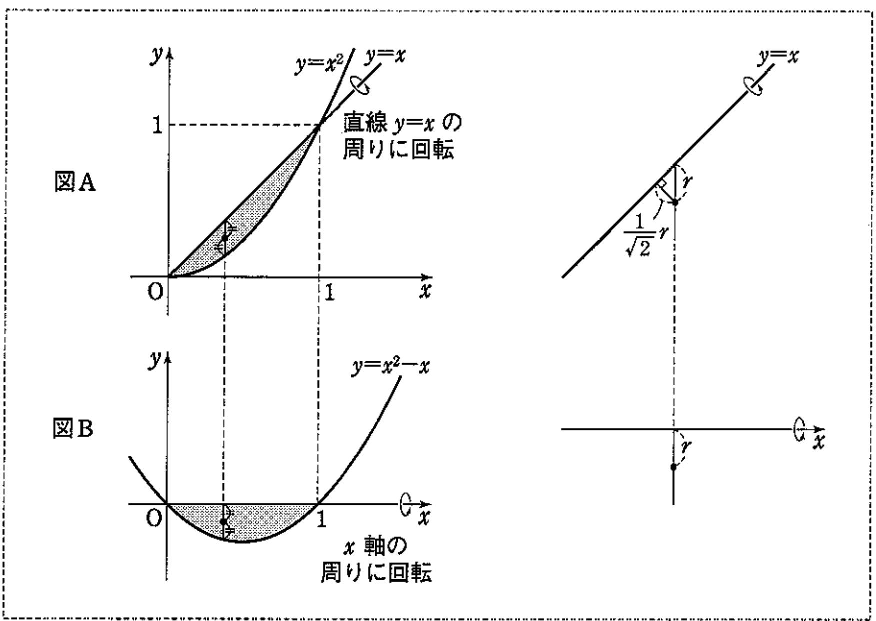
$$V=S\cdot 2\pi\cdot 4\sqrt{2}=V_x\sqrt{2}$$
$$=\frac{160}{3}\sqrt{10}\,\pi$$

2. 放物線の重心の応用

さらに，次の問題を考えてみましょう．

問題 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれる図形を直線 $y=x$ の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ．

〔略解〕 ここでもパップス・ギュルダンの定理を使ってみましょう．左下の図A，Bを見比べてください．図Aと図Bの ↕ は同じ長さです．これを非常に細い長方形だと考えると，・はそれぞれの長方形の



重心になります．<u>図B・の回転半径を r とすると，図A・の回転半径は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}r$ になります．(右下図参照)</u>

図 A，B について 2 曲線で囲まれた部分を x 軸に垂直な直線で切ったとき，切り取られた長さはすべて等しいので，この 2 つの面積は等しく(カバリエリの原理)，すべての ϕ について上の下線部分が成り立ちます．よって，図 A，B の回転体の体積をそれぞれ V_A，V_B とすると

$$V_A=\frac{1}{\sqrt{2}}V_B$$

が成り立ちます．すると，

$$V_B=1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\times 2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{\pi}{30}$$

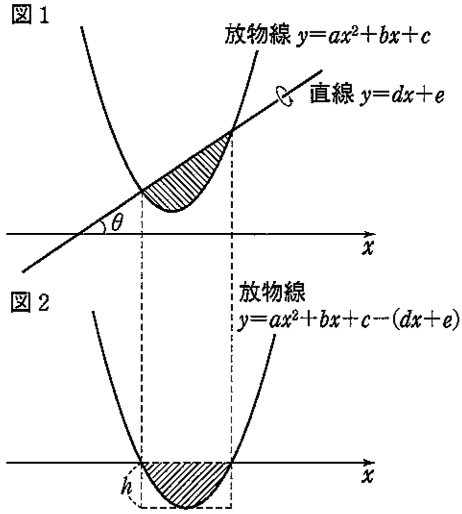
であるから，

$$V_A=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{30}=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

と求まります．

まとめ

図 1



の面積を S とする．

図 1 の回転体の体積 V は

$$V=S\cdot\frac{2}{3}\times 2\pi\cdot\frac{2}{5}h\cos\theta$$

〈参　考　文　献〉

大学への数学　微積分　基礎の極意(東京出版)

(日本大学習志野高等学校)