完全順列の解法と集合の個数公式

松岡(まつおか)　学(まなぶ)

0. はじめに

数学Iの「個数の処理」で，完全順列という大事な考え方がある．解法としてはいろいろあるが漸化式を用いるものが一般的だと思う．それはそれでとても大事な解法であるが，考え方としてはnが1のとき，2のとき，3のとき，……と順番に求めていくものなので，もう少し直接的にnの場合を求められないだろうかと感じていた．参考書などで調べてみると，一応nの場合の等式が載ってはいるものの，説明としては〝数え過ぎ〟を足したり引いたりする，と書いてあるだけでどうも分かりにくい．あと，説明としても不十分のような気がしたので，自分なりにいろいろと考えてみたところ，集合の言葉を用いればこの等式を正確に説明し，記述できることに気がついたので，ここで紹介しようと思う．

1. 完全順列の標準的な解法

ここでは，完全順列の標準的な解法を紹介しようと思う．

問題1　箱がn個，カードがn枚あって，それぞれ1からnまでの数字が書いてある．このn枚のカードを1枚ずつ箱に入れるとき，カードの数字と箱の数字の一致するものが1つもないような入れ方の数を$f(n)$で表す．$f(2)=1$，$f(3)=2$，$f(4)=(\quad)$であることは容易にわかる．これから

$f(5)=5!-\{(\quad)f(4)+(\quad)f(3)+(\quad)f(2)+1\}=(\quad)$

となる．

(考え方)　一致する番号の数で場合分けする．

(解答)　4枚のカードの入れ方の総数は

$$4!=24 \text{ 通り}$$

カードと箱の数がすべて一致するものは1通り，3個だけ一致するものは0通り，2個だけ一致するものは${}_4C_2f(2)$通り(一致する2個の選び方が${}_4C_2$通りあり，そのそれぞれに対して，残り2個を一致しないように入れる入れ方が$f(2)$通り)，1個だけ一致するものは${}_4C_1f(3)$通りある．以上より，全体から一致している場合を引いて

$$f(4)=4!-({}_4C_1f(3)+{}_4C_2f(2)+1)$$
$$=24-(8+6+1)=9$$

$f(5)$の場合も，$f(4)$と同様に考えて

$$f(5)=5!-({}_5C_1f(4)+{}_5C_2f(3)+{}_5C_3f(2)+1)$$
$$=5!-(5f(4)+10f(3)+10f(2)+1)$$
$$=120-(45+20+10+1)=44$$

(解答終り)

解答の考え方はnの場合にも適用できる．これによって次の式を得る．

$$f(n)=n!-({}_nC_1f(n-1)+{}_nC_2f(n-2)+\cdots\cdots+{}_nC_{n-2}f(2)+1)$$

よって，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$，……と順次求めていくことができる．

問題2　n個の箱とn個の球がある．n個の箱には1，2，……，nと通し番号がついている．n個の球にも1，2，……，nと通し番号がついている．いま，n個の箱に1つずつ球を入れるとき，箱の番号と球の番号が全部異なっているような入れ方の総数をu_nとする．このとき

(1)　$u_1=0$，$u_2=1$，$u_3=\boxed{}$，$u_4=\boxed{}$である．

(2)　u_{n+1}，u_n，u_{n-1}の間には

$u_{n+1}=\boxed{}u_n+\boxed{}u_{n-1}$という関係がある．

(3)　u_{n+1}とu_nの間には$u_{n+1}=\boxed{}$という関係がある．

(解答)　(1)　$u_3=2$，$u_4=9$

(2)　1，2，……，$n+1$の番号が書かれた箱に入れる球の番号をそれぞれa_1，a_2，……，a_{n+1}とする．($a_i\neq i$，$i=1, 2, \cdots\cdots, n+1$)

$a_1=i$ ($i=2, 3, \cdots\cdots, n+1$) とする．

(ア)　$a_i=1$ならば，番号2，3，……，$n+1$(iを除く)の球を題意を満たすように入れればよいからu_{n-1}通りある．

(イ) $a_i \neq 1$ ならば，番号1, 2, ……, $n+1$（i を除く）の球を題意を満たすように入れればよいから u_n 通りある．

i のとり方は n 通りだから

$$u_{n+1}=nu_n+nu_{n-1}$$

(2)の別解

(ア) 2, 3, ……, $n+1$ の n 個の順列で，1個だけ箱と球の番号が一致しているものは $n\cdot u_{n-1}$ 個ある．その一致している球と球1を入れ替えると完全順列になる．

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & i & \cdots\cdots & n+1 \\ 1 & 5 & 2 & \cdots\cdots & i & \cdots\cdots & 4 \end{array}$$

入れ替え

(イ) 2, 3, ……, $n+1$ の n 個の完全順列 u_n で，球1を2, 3, ……, $n+1$ 番のどの球と入れ替えても，完全順列である．

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & i & \cdots\cdots & n+1 \\ 1 & 5 & 2 & \cdots\cdots & 3 & \cdots\cdots & 4 \end{array}$$

入れ替え

よって　　$n\cdot u_n$ 個

したがって　　$u_{n+1}=nu_n+nu_{n-1}$

(3)　(2)より　　$u_{n+1}=nu_n+nu_{n-1}$

両辺に $-(n+1)u_n$ を加えると

$$u_{n+1}-(n+1)u_n=-(u_n-nu_{n-1})$$

したがって

$$\begin{aligned} u_{n+1}-(n+1)u_n&=-(u_n-nu_{n-1})\\ &=(-1)^2\cdot\{u_{n-1}-(n-1)u_{n-2}\}\\ &=\cdots\cdots=(-1)^{n-1}\cdot(u_2-2u_1)\\ &=(-1)^{n-1}\end{aligned}$$

よって　　$u_{n+1}=(n+1)u_n+(-1)^{n-1}$

（解答終り）

この問題の(2)より次の式を得る．

$$u_n=(n-1)u_{n-1}+(n-1)u_{n-2}\quad(n\geqq 3)$$

よって，$u_1=0$, $u_2=1$ から，u_3, u_4, u_5, ……と順次求めていくことができる．

また，(3)より次の式を得る．

$$u_n=nu_{n-1}+(-1)^n\quad(n\geqq 2)$$

よって，$u_1=0$ から u_2, u_3, u_4, ……と順次求めていくことができる．

2. 取り込みと押し出しの方法

1, 2, ……, n の完全順列の総数を $f(n)$ とする．つまり，1, 2, ……, n の順列 a_1, a_2, ……, a_n で $a_i \neq i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ となるものの総数が $f(n)$ である．この項では，「取り込みと押し出しの方法」を用いて，一般の $f(n)$ を求めてみる．

少なくとも1個の a_i が $a_i=i$ となるような順列の集合を A とする．順列の総数から，一致している場合を引くことによって，$f(n)=n!-n(A)$ を得る．

ここで，$n(A)$ を求めたい．$a_i=i$ となる順列は $(n-1)!$ 通りあり，i は1, 2, ……, n より全部で ${}_n\mathrm{C}_1\cdot(n-1)!$ 通りある．ここで $a_1=1$ かつ $a_2=2$ などとなるものが重複して数えられる．そこで，〝数え過ぎ〟を引いて

$${}_n\mathrm{C}_1\cdot(n-1)!-{}_n\mathrm{C}_2\cdot(n-2)!$$

今度は $a_1=1$ かつ $a_2=2$ かつ $a_3=3$ などとなるものを引き過ぎている．このように順次考えていくと

$$\begin{aligned} f(n)=n!-\{&{}_n\mathrm{C}_1(n-1)!-{}_n\mathrm{C}_2(n-2)!+\cdots\cdots\\ &+(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_n 0!\}\end{aligned}$$

を得る．${}_n\mathrm{C}_i$ を計算して次のように変形した方が扱いやすいと思う．

$$f(n)=n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right\}$$

3. n 個の集合の和集合の個数公式

この項では n 個の集合の和集合の個数を求める公式を求める．まずは，次の基本的な公式から始める．

公式　${}_n\mathrm{C}_1-{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\cdot{}_n\mathrm{C}_n=1$

証明　2項定理 $(a+b)^n=a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$ において $a=1$, $b=-1$ とおくと

$$0=1-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$$

よって　　${}_n\mathrm{C}_1-{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\cdot{}_n\mathrm{C}_n=1$

（証明終り）

この公式を用いて，n 個の集合の和集合の個数を求める公式を導こうと思う．

公式　n 個の集合 A_1, A_2, ……, A_n の和集合 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n$ の要素の個数について，次の等式が成り立つ．

$$n(A_1\cup\cdots\cdots\cup A_n)$$
$$=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\sum_{i_1<\cdots<i_l}n(A_{i_1}\cap\cdots\cdots\cap A_{i_l})\quad\cdots\cdots(*)$$

証明　任意の $a \in A_1 \cup \cdots\cdots \cup A_n$ について a が(＊)の右辺の式によって何回足されるかを計算し，それが１であることを証明する．

一般に「$a \in A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots\cdots \cap A_{j_r}$ かつ j_1, j_2, ……, j_r 以外の j に対して $a \notin A_j$」と仮定する．

a は(＊)の右辺において

$n(A_i)$ の部分で　r 回足される

$n(A_{i_1} \cap A_{i_2})$ の部分で　$-{}_rC_2$ 回足される

なぜなら，r 個の文字 j_1, j_2, ……, j_r の中から２個の文字 i, j をとると $a \in A_i \cap A_j$ となり，さらに(＊)の右辺で $l=2$ のとき $(-1)^{l+1}=-1$ となるからである．

$n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$ の部分で　${}_rC_3$ 回足される

……

以上より，a は(＊)の右辺で

$$r-{}_rC_2+{}_rC_3-\cdots\cdots+(-1)^{r+1}\cdot{}_rC_r \text{ 回}$$

足される．つまり

$$\begin{aligned} & r-{}_rC_2+{}_rC_3-\cdots\cdots+(-1)^{r+1}\cdot{}_rC_r \\ &={}_rC_1-{}_rC_2+{}_rC_3-\cdots\cdots+(-1)^{r+1}\cdot{}_rC_r \\ &=1 \end{aligned}$$

よって，等式(＊)が証明された

(証明終り)

4. 取り込みと押し出しの方法の集合を用いた正確な記述

この項では，取り込みと押し出しの方法を n 個の集合の和集合の個数の公式を用いて，正確に記述する．

1, 2, ……, n を並べかえたものを a_1, a_2, ……, a_n とし，$(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n)$ について考える．集合 A_i を次のように定める．

$$A_i=\{(a_1,\ \cdots\cdots,\ a_n) \mid a_i=i\} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$n(A_i)=(n-1)!$ より　$\sum_{i=1}^{n} n(A_i)={}_nC_1\cdot(n-1)!$

$i \neq j$ のとき，$n(A_i \cap A_j)=(n-2)!$ より

$$\sum_{i<j} n(A_i \cap A_j)={}_nC_2\cdot(n-2)!$$

$i_1<i_2<i_3$ のとき $n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})=(n-3)!$ より

$$\sum_{i_1<i_2<i_3} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})={}_nC_3\cdot(n-3)!$$

……

公式(＊)を適用することによって，次の式を得る．

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup \cdots\cdots \cup A_n) &= {}_nC_1(n-1)!-{}_nC_2(n-2)! \\ &\quad +{}_nC_3(n-3)!-\cdots\cdots \\ &\quad \cdots\cdots+(-1)^{n+1}{}_nC_n0! \end{aligned}$$

ここで，1, 2, ……, n の完全順列の総数を $f(n)$ とすると，順列の総数から，一致している場合を引くことによって $f(n)=n!-n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n)$ を得る．以上をあわせると次の等式を得る．

$$\begin{aligned} f(n) &= n!-\{{}_nC_1(n-1)!-{}_nC_2(n-2)!+\cdots\cdots \\ &\quad +(-1)^{n+1}{}_nC_n0!\} \\ &= n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right\} \end{aligned}$$

よって，取り込みと押し出しの方法を集合の公式を用いて正確に記述することができた．

〈参　考　文　献〉

内山秀紀，松岡学，「サイコロの問題と集合」，数研通信 No.38

(三重県立長島高等学校)