一般三角形の解法

～『「三角形を解く」ことに関する一考察』を受けて～

森　靖之（もり　やすゆき）

1. はじめに

数研通信 No.36 に，神奈川大学附属高校の高橋純先生の，「三角形を解く」ことについての論文(参考文献[1])が載っている(以下，高橋論文とよぶことにする)．そこには，2辺と1つの対角が与えられた場合の解の個数の類別がある．余弦定理を2次方程式とみて，判別式 $D/4$ や正の解(解と係数の関係)などと関連させた興味深い論文である．

また，教師という立場では，三角形が存在しない問題を出題しないようにチェックする必要がある．

そこで，2辺と1つの対角が与えられた場合の解の個数の類別を，高橋論文の二番煎じではあるが論じてみたい．本稿では，正弦定理から場合分けを行い，図形的にその意味を考察してみた．

2. 三角形成立の条件

高橋論文にあるように，三角形を解く問題の型は与えられた要素によって次のように類別されている．

Ⅰ．3辺が与えられた場合

Ⅱ．2辺とその夾角が与えられた場合

Ⅲ．1辺と2角が与えられた場合

Ⅳ．2辺とその1つの対角が与えられた場合

ⅠからⅢまでは解が存在するときは，明らかに一意に定まる．ⅠからⅢについて，三角形成立の条件を念のために述べておくと次のようになる．

Ⅰは3辺を a, b, c とすれば，$|a-b|<c<a+b$ である．

Ⅱは2辺を b, c, 夾角を A とすれば，$b>0$, $c>0$, $0°<A<180°$ である．

Ⅲは1辺を a, 2角を B, C とすれば，$a>0$, $B>0°$, $C>0°$, $B+C<180°$ である．

Ⅳについて三角形成立の条件を考察することが，本稿の主題である．

3. 2辺と1つの対角が与えられた場合の解の個数の類別

2辺 a, b とその1つの対角 A が与えられたときに c を求めることを考える．ここで，$a>0$, $b>0$, $0°<A<180°$ 等は仮定しておく．(以下，表1を参照のこと)

正弦定理より，$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ となる．

(ⅰ) $a<b\sin A$ のとき

$\sin B>1$ となり不適となる(表1のア，カ，サ)．

(ⅱ) $a=b\sin A$ のとき

$\sin B=1$ より，$B=90°$ となる．

よって $A\geqq 90°$ のときは不適．(表1のキ，シ)

$A<90°$ のときは b が斜辺で B が直角の直角三角形となる(表1のイ)．

(ⅲ) $b\sin A<a$ のとき

$\sin B<1$ より，$B=B_1$, B_2 $(B_1+B_2=180°$, $B_1<90°<B_2)$ となる鋭角 B_1, 鈍角 B_2 が存在する．

(1) $A+B_1<180°$, $A+B_2<180°$ のとき，

$A<90°$ となる．もしここで，$a\geqq b$ とすると，$A\geqq B$ となる．

$B=B_1$ のとき，

$$A+B_2=A+(180°-B_1)=A-B_1+180°$$
$$=A-B+180°\geqq 180°$$

これは $A+B_2<180°$ に矛盾する．

$B=B_2$ のときも同様に矛盾する．したがって，$a<b$ とならなくてはならない．すなわち，

$b\sin A<a<b$, $A<90°$ とならなくてはならない．このときの図をかくと表1のウのようになり，条件を満たしている．そして解は2つある．

(2) $A+B_1<180°$, $A+B_2\geqq 180°$ のとき，

$B=B_2$ とすると，$A+B=A+B_2\geqq 180°$ となり不適．よって，$B=B_1$ となる．

$$180^\circ \leqq A+B_2=A+(180^\circ-B_1)$$
$$=(A-B_1)+180^\circ=A-B+180^\circ$$

より $A \geqq B$ となり，$a \geqq b$ となる．

$a=b$ のときは，$A=B$ より $A<90^\circ$ となる．逆に $a=b$，$A<90^\circ$ のときは $A+B_1<180^\circ$，$A+B_2=180^\circ$ で，表1のエのようになり，条件を満たしている．このとき解は1つ．

$b<a$ のときは，Aは鋭角，直角，鈍角の場合があり，いずれも $A+B_1<180^\circ$，$A+B_2>180^\circ$ で，表1のオ，コ，ソのようになり，条件を満たしている．このときも解は1つ．

(3) $A+B_1 \geqq 180^\circ$，$A+B_2 \geqq 180^\circ$ のときは明らかに不適である．

以上の結果をまとめると表2のようになる．

また，c を具体的に求めるには，余弦定理より $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ であることから，

$$c^2-2b(\cos A)c+b^2-a^2=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

となり，この c についての2次方程式$(*)$を解けばよい．

なお，解が1つのときは，

$$c=b\cos A+\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$$

解が2つのときは，

$$c=b\cos A\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}$$

となる．

4. 考察

まず，表1の見方を説明する．角Aと辺b(表1ではACのこと)が与えられている状態で，点Cを中心に半径aの円をかいたものである．点Cと直線との距離が$b\sin A$となっている．2次方程式$(*)$の判別式 $D/4=a^2-b^2\sin^2 A$ とすれば

円と直線の交点がない $\Longleftrightarrow a<b\sin A \Longleftrightarrow D<0$

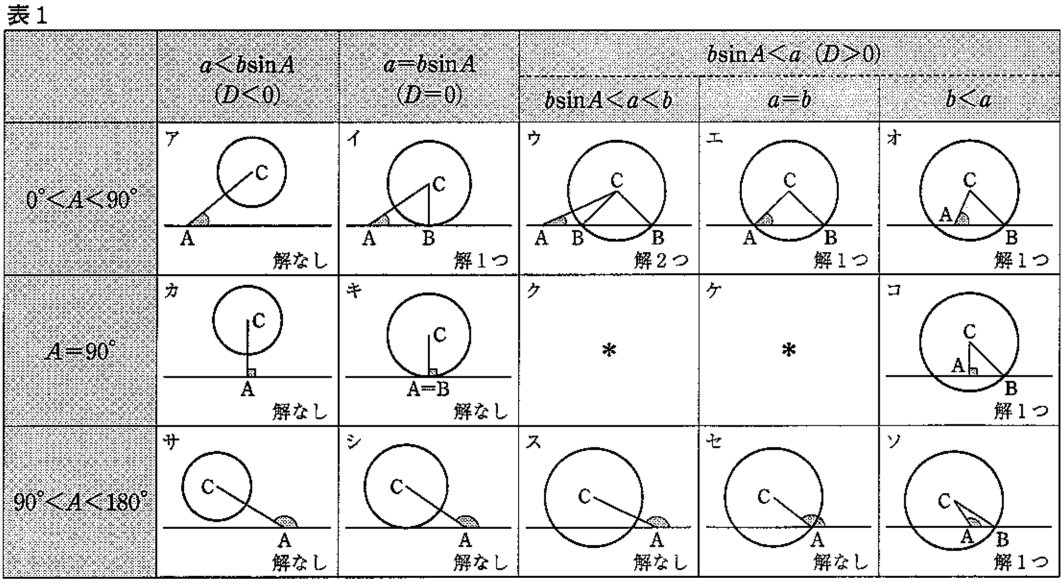
円と直線の交点が1つ $\Longleftrightarrow a=b\sin A \Longleftrightarrow D=0$

円と直線の交点が2つ $\Longleftrightarrow a>b\sin A \Longleftrightarrow D>0$

となる．

ここで注意しなければいけないのは，$D>0$ だからといって，解が2つになるとは限らないことである(表1のエ，オ，コ，ス，セ，ソ)．あくまで判別式

表1



	$a<b\sin A$ ($D<0$)	$a=b\sin A$ ($D=0$)	$b\sin A<a$ ($D>0$)		
			$b\sin A<a<b$	$a=b$	$b<a$
$0^\circ<A<90^\circ$	ア 解なし	イ 解1つ	ウ 解2つ	エ 解1つ	オ 解1つ
$A=90^\circ$	カ 解なし	キ 解なし	ク ＊	ケ ＊	コ 解1つ
$90^\circ<A<180^\circ$	サ 解なし	シ 解なし	ス 解なし	セ 解なし	ソ 解1つ

表2

	$a<b\sin A$	$a=b\sin A$	$b\sin A<a$		
			$b\sin A<a<b$	$a=b$	$b<a$
$0^\circ<A<90^\circ$	解なし	解1つ	解2つ	解1つ	解1つ
$A=90^\circ$	解なし	解なし	＊	＊	解1つ
$90^\circ<A<180^\circ$	解なし	解なし	解なし	解なし	解1つ

$D/4$ の符号は円と直線との交点の数を表しているだけで三角形の解の個数を必ずしも表しているわけではない。

クについては $A=90°$ より，$b<a<b$ となって不適であり絵がかけない。ケについても
$b\sin A<a$ かつ $a=b$ より，$\sin A<1$ となって
$A=90°$ となり得ないので，不適であり絵がかけない。

ところで，表1や表2で，Aが直角のときと鈍角のときをわざわざ場合分けしてあるのは，円と直線の関係を視覚的に理解しやすいようにしたためである。

ここで高橋論文を考察してみる。高橋論文の判別式Dは前述したように円と直線の交点の数を意味している。そしてcを求めるために余弦定理から導いた2次方程式(＊)の判別式$D/4$と，解と係数の関係から巧みに場合分けがしてある。

私は始めのうち，この2次方程式(＊)が正の解cをもつときにそのまま三角形が存在するといえるか心配していた。しかし，余弦定理から不等式
$|a-b|<c<a+b$ が導けるので，余弦定理から得られた正の解はそのまま三角形の辺cとしてよいので，心配はいらない。

なお，高橋先生は，$D/4>0$ すなわち $b\sin A<a$ を自明の条件とされていたが，より正確には，表1のイの場合を補えば完璧となる。

5. まとめ

本稿では，2辺と1つの対角が与えられた場合の解の個数の類別について，正弦定理から場合分けを行い，図形的にその意味を確認した。

しかし，この表2の結果そのものを生徒に指導することは複雑過ぎて無理である。しかも，2次方程式(＊)の解のうち，ちょうど正の解だけが有効となり，虚数解や0以下の実数解は無効になることがわかっているので，生徒には夾角Aを含む余弦定理から2次方程式(＊)をたてて計算するとよい，と指導するのが一番無難なようである。

では，一般の三角形を解くときに，解の吟味をどう指導したらよいか。

① だいたいの図をかいて，検討をつけてから計算すれば心配ないこと

② 角と辺の大小関係「$A<B<C \Longleftrightarrow a<b<c$」を使って，導き出された解が有効かどうかチェックすること

があげられる。また，三角形の内角Aにおいては，$\cos A$ とAは1対1に対応しているが，正弦では1対1に対応していないことも指導する必要があろう。

6. 謝辞

本稿をまとめるにあたり，井坂雄一郎先生をはじめとする東海中学校数学科の先生方にご助言をいただきました。

〈参 考 文 献〉

[1] 高橋純，「三角形を解く」ことに関する一考察，数研通信 No.36，数研出版，1999.
[2] 黒田孝郎，新初等数学講座　第2巻 幾何　第5分冊　三角法，小山書店，1955.
[3] 笹部貞市郎，問題解法　三角法辞典，聖文社，1964.
[4] 高野金作，三角函数及びその応用　統計数理研究法，研究社学生文庫，1952.

(東海学園　東海中学校・高等学校)