行列 n 次方程式の解法について

石濱（いしはま） 文武（ふみたけ）

§0. はじめに

例えば,「$A^2-A-2E=O$ を満たす2次正方行列Aを求めよ」という問題は,行列Aの2次方程式の問題です.同様に, $A^2=E$, $A^3=E$ 等も行列の整方程式です.高校生向けの数学の書物はもとより,一般の書物でも,これらの問題を個々別々の方法で解いていて,上記のような統一的な見地からは扱っていません.本稿では,次の順に論を進めます.

(1) 行列の n 次方程式とは何か.

(2) 「行列の n 次方程式」と「数の n 次方程式」の類似点と相異点.

(3) 行列の n 次方程式の一般解法.

(4) 具体例.

なお,以下で, Aは実数成分の2次正方行列, Eは単位行列, Oは零行列とします.

§1. 行列の n 次方程式

数の n 次方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n=0 \qquad (1.1)$$

の x の代わりにAを'代入'し, p_n を p_nE で, 0を零行列Oで置き換えて得られる

$$A^n+p_1A^{n-1}+p_2A^{n-2}+\cdots+p_nE=O \qquad (1.2)$$

を行列の n 次方程式とよびます.

§2. 行列の n 次方程式の特徴

任意の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は常に,等式

$$A^2=mA-nE \qquad (2.1)$$

[Hamilton-Cayley の定理]を満たします.ただし, m はAのトレースで $m=a+d$, n はAの行列式で $n=ad-bc$ です.

したがって, Aの n 次方程式(1.2)は(2.1)を使って'次数下げ'ができますから, Aの1次方程式

$$sA=tE \qquad (2.2)$$

の形に変形できます.このことが行列の n 次方程式と数の n 次方程式との本質的な相異点です.

なお,例えば, Aが3次正方行列ならば, Hamilton-Cayley の定理は3次の等式になりますからAの n 次方程式は2次方程式に変形されることになります.

§3. 行列の n 次方程式の解法

§2で考察した通り,結局,方程式(2.2)を解くことになります.(2.2)で

[i] $s\neq0$ のとき

$$A=kE \qquad (3.1)$$

となりますが, k は次のようにして定まります.

(3.1)を(1.2)に代入すると, k の n 次方程式

$$k^n+p_1k^{n-1}+p_2k^{n-2}+\cdots+p_n=0 \qquad (3.2)$$

となり,その実数解が k です.

この場合, (3.2)の実数解の個数が(3.1)の解の個数になります.

[ii] $s=0$ のとき

(2.2)より, $t=0$ となるので,

$$s=t=0 \text{ を満たす} A \qquad (3.3)$$

が解になります.一般に, $s=t=0$ はAの成分 a, b, c, d については未知数が4個で,方程式が2個の不定方程式なので,解は無数にあります.

結局,行列 n 次方程式の解は
[i] スカラー行列(kE の形の行列)
[ii] スカラー行列でない行列
の2種類に分けられます.

したがって,具体的な問題を解くときは,始めからこの2種類に分けて解くと,効率的で実際的な解法になります.

§4. 具体例

§2で使った記号をそのまま使います.

(問) $A^2-A-2E=O$ (4.1)

を満たすAを求めよ.

(解) [i] $A=kE$ のとき

これを(4.1)に代入して

$$k^2-k-2=0$$
$$k=-1,\ 2$$
$$A=-E,\ 2E$$ 答

[ii] $A \neq kE$ のとき

(2.1)を(4.1)に代入して整理すれば

$$(m-1)A=(n+2)E$$
$$m=1,\ n=-2$$

よって，Aは $a+d=1$, $ad-bc=-2$ を満たす

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 答

なお，この場合，a, b, c, d から2文字を消去して答えることもできます．また，例えば，$a=1$, $b=2$ とすれば，$d=0$, $c=1$ となって，特殊解 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を得ます．

(問) $A^2-6A+9E=O$ (4.2)

(解) [i] $A=kE$ のとき

これを(4.2)に代入して

$$k^2-6k+9=0$$
$$k=3 \quad (\text{重解})$$
$$A=3E$$ 答

[ii] $A \neq kE$ のとき

(2.1)を(4.2)に代入して整理すれば

$$(m-6)A=(n-9)E$$
$$m=6,\ n=9$$

よって，Aは $a+d=6$, $ad-bc=9$ を満たす行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 答

(問) $A^3=E$ (4.3)

(解) [i] $A=kE$ のとき

これを(4.3)に代入して

$$k^3=1$$
$$k=1$$
$$A=E$$ 答

[ii] $A \neq kE$ のとき

(2.1)を(4.3)に代入して整理すれば

$$(m^2-n)A=(mn+1)E$$
$$m^2-n=mn+1=0$$
$$m=-1,\ n=1$$

よって，Aは $a+d=-1$, $ad-bc=1$ を満たす

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 答

例えば，$a=1$, $b=3$ とすれば，$d=-2$, $c=-1$ となって，特殊解 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ を得ます．

§5. おわりに

注① (4.1), (4.2)のように行列方程式が2次方程式 $A^2-mA+nE=O$ の形のとき，(解)の[ii]で見た通りこの2次方程式の解でスカラー行列でないもの($A \neq kE$ の形の解)は

$$\mathrm{tr}A=m,\ \det A=n$$

を満たすAになります．すなわち，行列方程式がHamilton-Cayleyの定理と同値になるときです．

注② (4.1)を

$$(A+E)(A-2E)=O$$

と因数分解し，スカラー解 $A=-E$, $2E$ を得て，

$$\det(A+E)=\det(A-2E)=O$$

からスカラー解でない解を得ることもできますが，この方法は理論的に難点があることに注意しなければなりません．例えば，この方法は(4.2)(重解型)には適用できません．理由は，$P \neq O$, $Q \neq O$ のとき命題「$PQ=O \Longrightarrow \det P=\det Q=0$」は成立しますが，一般にその逆は成立しない($P$, Qが非正則行列であっても零因子とはいえない)ことにあります．

(公文国際学園)