# 第12回日本数学コンクール

大沢　健夫

## 1. 大数教との出会い

正解のない問題で世間を驚かせた数学コンクールも，はや12回目となった．ということは数学コンクールはウマ年ということだ．それでは今年は馬にちなんだ問題でも作ろうか．そんなことを思いながら，第12回日本数学コンクールの報告をさせて頂くことにする．

今回の数学コンクールで特筆すべきは大数教(大阪高等学校数学教育会)との出会いであろう．大数教とは縁あって12年前からお付き合いさせて頂いているが，筆者が数学コンクールにも関わるようになり，その存在が青少年の科学的精神の涵養のため極めて有意義であることを確信し出した頃，彦根で大数教の方々と親しくお話しする機会があった．そんなきっかけがあって数学コンクールに関心を持つ大阪の高校の先生方と当方との接点が生まれ，今回は大阪会場が実現した．汗を流されたのは大数教の研究部の方々であり，本務の傍ら非常な努力をされたと推察される．その実行力に対して深く感謝と敬意を捧げたい．また会場を提供して頂いた清風高校にも深く感謝したい．

## 2. 浪花の心意気

大阪は元来，名古屋を含む1つの文化圏の中心である．宇宙の共通語のような数学でさえ，関西圏のまとまりの中で連綿と受けつがれたものを帯びている．わが国初の数学書とされる毛利重能の割算書は，その序文と内容からもキリスト教宣教師の講義に基づくという説が有力であるが，角倉家ゆかりの吉田光由の筆になる塵劫記はそれが見事に日本化，いや関西化された例と言って良いであろう．その伝統は大数教にも受け継がれているようである．実際，ある研究会で，三角法を夜間高校で教授する工夫についてユーモアたっぷりに話された先生がいらしたが，その印象は塵劫記の細緻なさし絵にも重なる感銘深いものであった．

そんな所に数学コンクールを持ち込むことは，屋上に屋を架するようなもので，あまり意味のないことかもしれない．しかし筆者の見るところ，大阪といえども数学教育に携わる方々の主たる関心は，いかに日々の授業を実効あらしめるかにある．とくに最近は理科離れ，数学離れの問題があり，授業を充実させるため一層の工夫が求められているので，先生方の注意がその点に集中するのは当然であろう．したがって，数学コンクールのようなものがここでも一服の清涼剤として働くかもしれないと思われた．

しかしながら，大数教にとって，従来の活動に含まれない異質なものを受け入れることを決心するのは簡単ではなかったであろう．

したがって，その決断をされた幾人かの方々には本当に頭の下がる思いであるが，ある会合で多くの方々と話して得た印象は，幸いにも大阪には数学コンクールを受け入れる下地が整っていたらしいということであった．教育の現場で経験を重ねられた方々の多くは，いつかは実行してみたいと思うアイディアを胸に秘めたままそこを去っていかれるのではなかろうか．そんな鬱憤が数学コンクールの存在によって少しは和らいだかのようである．思えば第8回目まで数学コンクールを引っ張って来られた四方義啓氏は神戸生まれの京都育ちであり，名古屋大学の教授になられる前は大阪大学にいらしたのだから，大阪会場の誕生は予定調和であったともいえよう．ちなみに大阪からは今回3名の受賞者(うち大賞2，ジュニア奨励賞1)が出た．

## 3. 二年目の論文賞

科学好きの高校生たちにとって，夏休み中の一週間を1つの課題のために費して，考えを論文の形にまとめ，その記念としてあわよくばトロフィーを獲得できるということは，そう魅力に乏しいことでは

ない．数学コンクール論文賞は，生徒の側からのそうした欲求に応えて昨年度に創設されたものだが，今回のテーマは以下の2題であった．(題意の要点のみを記す．)

**テーマ1[パッチワーク]** 野球のボールは2枚の同じ形の皮を縫い合わせてできているが，浮き輪の表面を2枚のゴムの薄膜で覆うとしたらどういう方法が良いかを提案して下さい．

**テーマ2[3次元の黄金と白銀]** 黄金比は，長方形から短い方の辺を一辺とする正方形を切り落としてできる小さい長方形が，元の長方形と相似になるときの長い辺と短い辺の比率のこと．白銀比は，長方形を半分に折り畳んだ時にできる小さい長方形が，元の長方形と相似になるときの辺の比率のこと．これらの比を3次元の直方体の場合に考えてみて下さい．

論文賞の金賞は，滝俊一君(東海高校当時2年)と岡崎建太君(半田高校当時2年)に与えられた．今回のテーマは，筆者の発案でなかったのが口惜しく思われるほど適切だったようで，テーマ1に取り組んだ岡崎君は寝床の中でも粘土をいじりながら考えたそうである．またテーマ2に関する滝君の論文は，フィボナッチ数列に相当する数列の$n$次元の黄金比に対して定義づけ，それらの驚嘆すべく美しい幾何学的性質の一例を発見しており，筆者は現在滝論文の英訳を検討中である．ちなみに両君の論文の要点は11月19日付の中日新聞紙上に紹介されている．(インターネットで公開されていると言えばもっと格好が良いのだろうが，諸般の事情があってできないでいる．)

## 4. 問題作りの舞台裏

日頃は数学者でございという顔をして，学生達の鼻づらを引き廻している者でも，コンクールの問題作りとなると七転八倒，脂汗を流してのたうち廻ったあげく，自分の無知無力に恥じ入って顔を伏せたくなる．今回も筆者はそんな経験をした．特に第1問[裏返すと？]に関してだが，最初タオルで浮き輪の形を作って裏返してみたとき，それが裏返す前と同じ形でないことをいぶかしく思ったことは数学者として実に恥ずかしい．二人乗りの浮き輪が裏返るイメージは一晩で出て来たが，実際にゴム膜でそれを作って裏返してみるまで安心できなかった．問題文にはないのだが，当日は会場に赤と青のタオルで作った縦長と横長の穴あきトーラスを用意し，参加者が手に取って裏返せるようにした．その他に洗濯機のチューブ(1.5m)を結び目状に巻いて両端を接合したものを置いて，発展的な考えをうながした．その結果，この種の幾何学的感覚においては筆者は標準以下なのではないかと思えるほど，正解者が続出した．ここまでわかるのにこちらはこんなに苦労したんだがなあ，と一旦はそう思ったが，新しい経験によって身につく感覚の大小が年齢に正比例しないのは当然である．

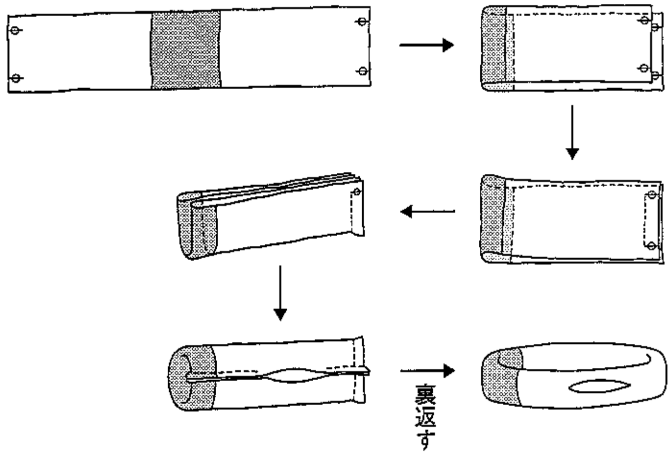
第2問は複素数の幾何学への応用という観点から発想されたものである．複素数の四則が平面幾何的な意味を持つことは，高校生のレベルでは十分に魅力的なことであると思われる．

第3問は円柱の表面が鏡になっているとき，底面に平行な直線がどう写って見えるかを問うものだが，光が円柱鏡に当たったときの反射の法則と，その利用の仕方が大部分の参加者にとっては難題だったらしい．写った曲線は4次曲線であり，一松信先生(東京電機大学)によれば19世紀に盛んに研究されたものの一つらしい．(代表的なのは擬円と呼ばれる4次曲線で，円柱上にコンパスで描かれるものである．)このようなものは普段何げなく見過ごしているものであり，筆者も数学コンクールがなければ気にも留めなかったと思われる．耳を澄まし，瞳を凝らすことの尊さを再認識したことであった．ちなみに問題文に添えた写真はJR名古屋駅構内のものである．

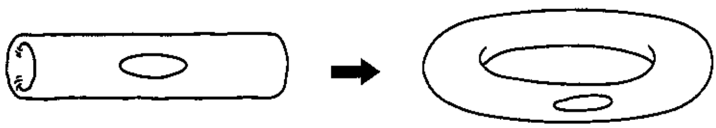
(名古屋大学 多元数理科学研究科)

## 問題1　裏返すと？

布切れをぬいあわせて袋などを作るとき，ぬいしろが外から見えないように裏返します．このときぬったものの形が裏返す前後で変わることがあるのを知っていますか？　たとえば一枚の長方形の布から次の手順で輪の形を作るときにはそうなります．



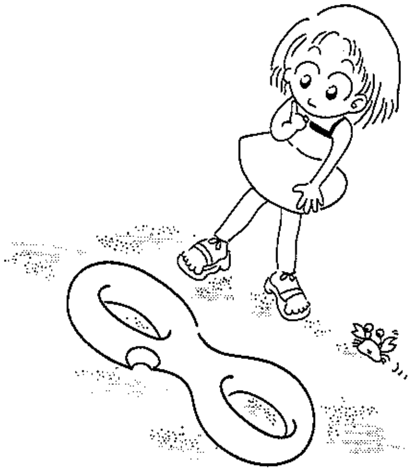

裏返す作業だけに注目することにします．ぬい目のことは忘れて，布の代わりに伸縮自在のゴムでできた曲面を裏返すことを考えましょう．すると上と同じ操作を下図のように簡単な形で表すことができます．



ちくわ型の曲面に
穴をあけたもの

穴のあいた浮き輪

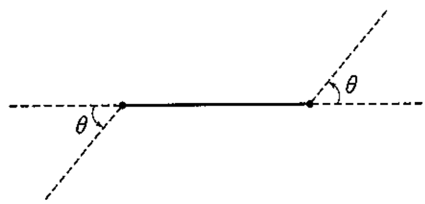
「ちくわ型の曲面を裏返すと浮き輪型になる」ともいえそうですね．
これを見て，みなさんはもっといろんな曲面を裏返してみたくなりませんか？　たとえば二人乗りの浮き輪を裏返すとどうなるでしょう．ほかにも自分でいろんな例を考えて，曲面を裏返すと形がどう変化するか，なるべく図を交えて説明をしてみて下さい．



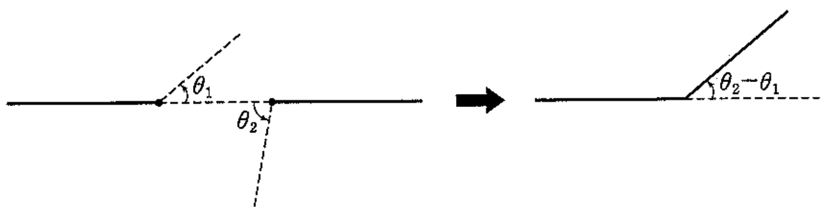
## 問題2　バナナをとる折れ線

天才チンパンジーのＩ君はバナナが大好きです．檻の外にあるバナナをいくつかの棒をつないで取る方法を知っています．

檻の中にある棒には下図のように両端に角度 $\theta$ の金具がついていて，棒を順につなぐことができます(金具の角度は棒ごとに異なっています)．ただし，$-180^\circ < \theta < 180^\circ$ で，角度は反時計回りを正とし，負の角度は時計回りに測ったものとします．




金具の角度が $\theta_1$ の棒に角度が $\theta_2$ の棒をつなぐと，2つの棒のなす角は $\theta_2 - \theta_1$ になります($\theta_1 < \theta_2$ ならば下図のようになります)．ただし，棒を裏返してつなぐことはできません．




まずは手始めに次の問題を考えてみて下さい．

[1]　長さ1の棒が4本あります．そのうちの3本の金具の角度が，$-120^\circ$，$0^\circ$，$120^\circ$ であるとき，いくつかの棒を選んでつなげると，必ず $\sqrt{3}$ の長さまで届くことを説明して下さい．

[2]　長さ1の棒が4本あって，それらの金具の角度がすべて $-60^\circ$ から $60^\circ$ の間であれば，4本の棒をつなぐと，長さ2までは届くことを示して下さい．

さて本題です．檻の中には長さ1の棒が $n$ 本あります．バナナが檻から $6/n$ の長さ以内にあれば，それらの金具の角度がどんなであっても，チンパンジーのＩ君はいくつかの棒をつないで，バナナをとることができます．Ｉ君はどのように棒を選んでいるのでしょうか．

## 問題3　円柱鏡に映る蛍光灯

まっすぐにのびた通路の途中に丸い柱が立っていて，その横にあなたがいるとします．あなたの真後ろには通路の天井にそってどこまでも蛍光灯がついているとします．すると柱には蛍光灯の像が曲線として映ります．

(1) そのような蛍光灯が何列あっても，柱に映った曲線の端の点は，蛍光灯の高さや柱までの距離に関係なく同じ点ですが，それはなぜでしょうか．
(2) 蛍光灯を水平にしたままで，高さだけをいろいろ変えたとき，柱に映った曲線はどのように変化するでしょうか．
(3) あなたが曲線の両端をながめながら柱のまわりを一周するとき，それらの点はどんな動き方をするでしょうか．