空間内における新しい回転公式

鈴木　公樹（すずき　こうじゅ）

はじめに

複素数平面の考えを拡張して，z 軸に虚数単位 j を導入し，3 次元空間の点$(a,\ b,\ c)$に $a+bi+cj$ を対応させる．この形の数の演算(特に商)を形式的に定義することにより，空間の 2 直線のなす角や平面の方程式の決定，さらには空間内における点，直線，平面の回転に幅広く応用できることを以下に示そう．

1．定義と基本性質

定義 1　$a,\ b,\ c$ を実数として，$x=a+bi+cj$ と書き表される数を考え，その演算について次のように定義する．

(1)　$i^2=j^2=-1$

(2)　$ji=-ij$

(3)　$|x|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

(4)　点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ を $\mathrm{P}(x)$ と表す．

(5)　x の共役を $\overline{x}$ で表し，$\overline{x}=a-bi-cj$ とする．
このとき，$x\times\overline{x}=a^2+b^2+c^2$ より $|x|^2=x\cdot\overline{x}$ が成り立つ．

(6)　$K=\{a+bi+cj\,|\,a,\ b,\ c$ は実数$\}$ とする．
$x_1,\ x_2\in K\ (x_2\neq 0)$ に対して

$$\text{商}\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1\cdot\overline{x_2}}{x_2\cdot\overline{x_2}}$$

とする．(右側に掛ける)

(7)　原点Oと 2 点 $\mathrm{P}(x_1)$，$\mathrm{Q}(x_2)$ に対して，(6)により
$\dfrac{x_1}{x_2}=r(a+bi+cj+dij)$ ($r\geqq 0$；$a,\ b,\ c,\ d$ は実数) と変形したとき，この右辺を △QOP の特性数という．($a,\ b,\ c,\ d$ はどの 2 つも互いに素とする)
注意．△POQ の特性数は

$$\frac{x_2}{x_1}=r(a-bi-cj-dij)$$

となる．

定理 1　平面の決定

> 定義(7)において，線分 OQ から線分 OP へ向かう角の大きさを θ とするとき，次が成り立つ．
>
> (i)　$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$
>
> (ii)　平面 OPQ の法線ベクトルの成分は
> $$(d,\ -c,\ b)$$

〈証明〉 $x_1=a_1+b_1i+c_1j$，$x_2=a_2+b_2i+c_2j$ とする．

このとき

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2}}\{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)-(a_1b_2-a_2b_1)i-(a_1c_2-a_2c_1)j-(b_1c_2-b_2c_1)ij\}$$

と変形される．

特性数の成分の平方和は

$$(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2$$
$$=({a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2)({a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2)$$

となる．一方，ベクトルの内積より

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$ となるので(i)は成り立つ．

(ii)についてはベクトルの外積より明らかである．

例 1

> 空間の 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ -2,\ 4)$ について，△ABC を含む平面の方程式

〈解〉 点Bが原点に移るように平行移動して，$\mathrm{A}'(3,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{C}'(2,\ -2,\ 3)$ とする．

ここで，△C′OA′ の特性数を求めると

$\dfrac{3+i+2j}{2-2i+3j}=\dfrac{1}{17}(10+8i-5j-7ij)$ となる．

定理 1 より法線ベクトルは$(-7,\ 5,\ 8)$であるから，点Aを通ることとあわせて

$-7(x-2)+5(y-1)+8(z-3)=0$

$\therefore\quad 7x-5y-8z+15=0$

定義 2　定義 1 の(7)において，$\triangle$QOP の特性数 $S=r(a+bi+cj+dij)$ を変形して，

$$S=r\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\left\{\cos\theta+\sin\theta\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}i+\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}j+\frac{d}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}ij\right)\right\}$$

とする．ただし，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$，

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$ である．

このとき，{ }の中の式を $\triangle$QOP の単位特性数といって S^* で表すことにする．また，θ を特性数 S の偏角という．

定理 2　点の回転

> 空間の点 P(x_1)，Q(x_2) に対し，平面 OPQ 上で点 Q を原点 O を中心に点 P の方向に θ 回転した点を R(x) とする．
>
> このとき，$\triangle$QOP の単位特性数を，$\cos\alpha+\sin\alpha(ai+bj+cij)$，$a^2+b^2+c^2=1$ とすれば，
>
> $$x=\{\cos\theta+\sin\theta(ai+bj+cij)\}\times x_2$$
>
> である．

〈証明〉　$\triangle$OPQ と $\triangle$OQR は同一平面上にあるので，法線ベクトルは同じである．したがって，単位特性数の i，j，ij の係数の比は同じで，偏角が α から θ に変わるのみである．

例 2

> 空間の 2 点を P(1, 0, 1)，Q(1, 1, 1) とする．点 P を原点 O を中心に平面 OPQ 上を OQ の方向へ 30° 回転した点の座標

〈解〉　P$(1+j)$，Q$(1+i+j)$ より，$\triangle$POQ の特性数 S は

$$S=\frac{1+i+j}{1+j}=\frac{1}{2}(2+i-ij)$$

これより　$S^*=\dfrac{2}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}i-\dfrac{1}{\sqrt{2}}ij\right)$

点 R(x) とすれば，定理 2 より

$$x=\left\{\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i-\frac{1}{\sqrt{2}}ij\right)\right\}\times(1+j)$$

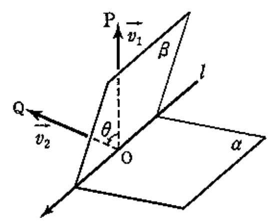
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}i+\sqrt{3}ij)$$

$\therefore\quad \mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. 応用

(1)　平面 α に含まれる直線 l のまわりの回転

(直線 l の方向ベクトルの x 成分は正とする)



図のように平面 α を l の方向ベクトルの進む方向に対して θ 回転した平面を β とし，平面 α，β の法線ベクトルを $\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ とする．また，その終点をそれぞれ P，Q とする．

このとき，$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ で定まる平面は直線 l と直交するので，その法線ベクトルは l の方向ベクトルに等しい．したがって，l の方向ベクトルを $(l,\ m,\ n)$，$l^2+m^2+n^2=1$ とするとき，$\triangle$POQ の単位特性数 S^* は，

$$S^*=\cos\theta+\sin\theta(ni-mj+lij)$$

となる．ゆえに，定理 2 から，Q(x)，P(x_0) とすれば

$x=S^*\times x_0$　(x_0 は $\vec{v_1}$ の成分で与えられる)

例 3

> 平面 α：$x-2y+3z-2=0$ に含まれる直線 l：$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}$ のまわりに平面 α を 60° 回転した平面 β の方程式

〈解〉　直線 l の方向ベクトルが $(4,\ -1,\ -2)$ なので，上記より，

$$S^*=\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}i+\frac{1}{\sqrt{21}}j+\frac{4}{\sqrt{21}}ij\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{7}}(\sqrt{7}-2i+j+4ij)$$

ゆえに，平面 β の法線ベクトル $\vec{v}$ は，

$$\frac{1}{2\sqrt{7}}(\sqrt{7}-2i+j+4ij)\times(1-2i+3j)$$

$$=\frac{1-\sqrt{7}}{2}-(1+\sqrt{7})i+\frac{3-\sqrt{7}}{2}j$$

$\therefore\quad \vec{v}=\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},\ -(1+\sqrt{7}),\ \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$

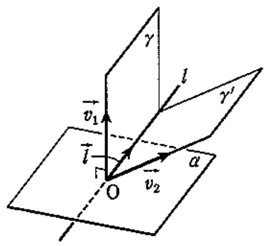
平面 β は l 上のすべての点を含むので，l 上の1点(1，1，1)を通るように平行移動すれば，

$$(1-\sqrt{7})x-2(1+\sqrt{7})y+(3-\sqrt{7})z=2-4\sqrt{7}$$

となる．

(2) 直線 l のまわりの回転

図のように，原点Oで直線 l と交わる平面 α を，l のまわりに θ 回転して得られる平面 β の法線ベクトルを $\vec{v_2}$ とする．ここで，$\vec{v_1}$ は平面 α の法線ベクトル，$\vec{l}$ は直線 l の方向ベクトルである．このとき，$\vec{v_2}$ は次の手順で求められる．



① 2つのベクトル $\vec{v_1}$，$\vec{l}$ で定まる平面 γ を求める．

② 平面 γ を(1)の方法で直線 l のまわりに θ 回転し，その平面を γ' とする．

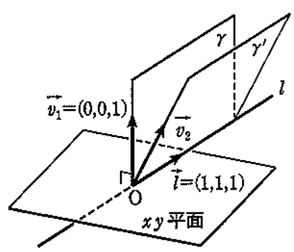
③ 平面 γ' の法線ベクトルとベクトル $\vec{v_2}$ と $\vec{l}$ のなす角(これはベクトル $\vec{v_1}$ と $\vec{l}$ のなす角に等しい)より，平面 γ' の単位特性数 S^* をつくる．

④ ③で得られた S^* と $\vec{l}$ の成分との積より $\vec{v_2}$ の成分が得られる．

例4

> xy 平面を直線 l：$x=y=z$ のまわりに45°回転して得られる平面の方程式

〈解〉 直線 l の方向ベクトル(1，1，1)と xy 平面の法線ベクトル $\vec{v_1}=(0,\ 0,\ 1)$ で定まる平面 γ の法線ベクトルは



$$\frac{j}{1+i+j}=\frac{1}{3}(1+j+ij)$$

より(1，−1，0)となる．

この平面 γ を直線 l のまわりに45°回転した平面 γ' の法線ベクトルは例3の方法より，

$$\left\{\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\left(\frac{1}{\sqrt{3}}i-\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}ij\right)\right\}\times(1-i)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

となる．

さて，$\vec{l}$ と $\vec{v_1}$ のなす角を α とすれば

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ より，平面 γ' の単位特性数 S^* は，

$$S^*=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{2}{\sqrt{6}}i+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)j+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)ij\right\}$$

ゆえに，求める平面の法線ベクトルは

$$S^*\times(1+i+j)=\frac{1}{\sqrt{6}}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)+(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)i+(2+\sqrt{2})j\}$$

これより，平面の方程式は

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)y+(2+\sqrt{2})z=0$$

3. 特性数 S の積の表すもの

(i) S^n (n は自然数)について

$$S=r\{\cos\theta+\sin\theta(ai+bj+cij)\}$$

(ただし，$r>0$，$a^2+b^2+c^2=1$) と変形すれば

$$S^n=r^n\{\cos n\theta+\sin n\theta(ai+bj+cij)\}$$

が成り立つ．

これは数学的帰納法で簡単に証明できる．

(ii) S_1，S_2 ($S_1\neq S_2$) の積について

S_1，S_2 に対応する三角形をそれぞれ，$\triangle P_1OQ_1$，$\triangle P_2OQ_2$ とし，点 $P_1(x_1)$，$Q_1(x_2)$，$P_2(x_3)$，$Q_2(x_4)$ とすれば $S_1=\dfrac{x_2}{x_1}$，$S_2=\dfrac{x_4}{x_3}$ と表される．

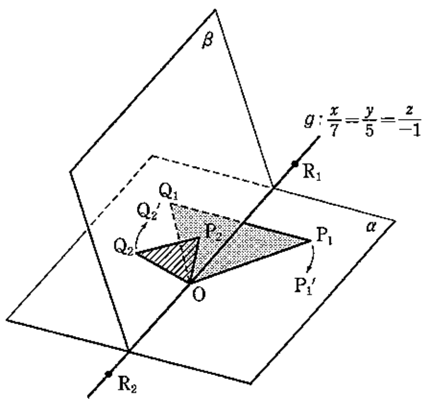
このとき，$S_1\times S_2=\dfrac{x_2}{x_1}\times\dfrac{x_4}{x_3}$ となるが，右辺の式は商の定義から $x_1=tx_4$ (t は実数) の関係をもつとき約分が可能となる．

したがって，$\triangle P_1OQ_1$，$\triangle P_2OQ_2$ の2つの平面の交線に重なるように点 P_1，Q_2 を原点Oを中心に回転し，そのとき点 Q_1，P_2 の回転された点をそれぞれ $Q_1'(x_2')$，$P_2'(x_3')$ とすれば，$S_1\times S_2=t\dfrac{x_2'}{x_3'}$ となり，積 $S_1\times S_2$ は $\triangle P_2'OQ_1'$ の特性数となる．

例 5

> $P_1(2, 4, 1)$, $Q_1(3, -1, -2)$, $P_2(1, 1, -1)$, $Q_2(-1, 0, -2)$ とする．$\triangle P_1OQ_1$, $\triangle P_2OQ_2$ の特性数をそれぞれ，S_1, S_2 とする．このとき，$S_1\times S_2$, $S_2\times S_1$ の表す三角形について．

〈解〉 $\triangle P_1OQ_1$, $\triangle P_2OQ_2$ の表す平面を図のように α, β とする．



また，α, β の交線を g とする．

$$S_1=\frac{3-i-2j}{2+4i+j}=\frac{1}{3}(-2i-j-ij)$$

$$S_2=\frac{-1-2j}{1+i-j}=\frac{1}{3}(1+i-3j-2ij)$$

さて，線分 OQ_1 と OP_2 が図の交線 g と点 R_1 側で重なるように回転したとき，点 P_1, Q_2 がそれぞれ P_1', Q_2' に移ったとして点 P_1', Q_2' の座標を求める．

(i) P_1' について

$\overrightarrow{OR_1}=(7, 5, -1)$ として，$\angle R_1OQ_1=\theta$ とすれば

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OR_1}}{|\overrightarrow{OQ_1}||\overrightarrow{OR_1}|}=\frac{18}{5\sqrt{42}}$$

となる．

これより　$\sin\theta=\dfrac{11\sqrt{6}}{5\sqrt{42}}$

したがって，$\triangle P_1OP_1'$ の単位特性数 S^* は $\triangle P_1OQ_1$ の特性数の偏角とは逆向きの回転であるので，$-\theta$ として，

$$S^*=\frac{18}{5\sqrt{42}}+\frac{11\sqrt{6}}{5\sqrt{42}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}i+\frac{1}{\sqrt{6}}j+\frac{1}{\sqrt{6}}ij\right)$$

このとき，

$$S^*\times(2+4i+j)=\frac{21}{5\sqrt{42}}(-3+5i+4j)$$

ゆえに，$P_1(x_1')$ とすれば，

$$x_1'=\frac{21}{5\sqrt{42}}(-3+5i+4j)$$

(i)と同様に計算をして，$Q_2'(x_4')$ とすれば

$$x_4'=\frac{1}{15}(-1+10i-32j)$$

さて，$S_1=\dfrac{x_2}{x_1}$, $S_2=\dfrac{x_4}{x_3}$ は，$R_1(x_0)$ として，

$S_1=\dfrac{tx_0}{x_1'}$, $S_2=\dfrac{x_4'}{ux_0}$ (t, u 実数)と変形したことになり，$S_2\times S_1=\dfrac{t}{u}\times\dfrac{x_4'}{x_1'}$ となる．

実際に計算すると

$$S_2\times S_1=\frac{1}{9}(1+i-3j-2ij)(-2i-j-ij)$$

$$=-\frac{1}{9}(3+i-4j+8ij)$$

一方，$\dfrac{x_4'}{x_1'}=-\dfrac{\sqrt{42}}{126}(3+i-4j+8ij)$ となり，実数倍の違いのみである．

ゆえに，$S_2\times S_1$ は，$\triangle P_1'OQ_2'$ の特性数である．

これと同様に，OP_1, OQ_2 が交線 g の R_2 側に重なるように回転したとき，点 Q_1, P_2 がそれぞれ Q_1', P_2' に移ったとすると，$S_1\times S_2$ は $\triangle Q_1'OP_2'$ の特性数になる．

おわりに

これまでの考え方を拡張すれば 4 次元以上の空間にも応用できる．実際，4 次元の点(a, b, c, d)に $x=a+bi+cj+dk$ (i, j, k は虚数単位) を対応させれば，特性数は

$$S=a+bi+cj+dk+eij+fik+gjk$$

の形で表され，その三角形を含む平面の方程式は，

$$\begin{cases} ex-cy+bz=0 \\ gy-fz+eu=0 \end{cases}$$

の形で表される．

(愛知県立犬山高等学校)