# $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ の図形的証明

村上(むらかみ)　秋雄(あきお)

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

の証明を考えるとき，図形を用いて証明できずにもどかしい思いをしてきた．

上記公式の図形による説明を考えた．

(1)　図１の正方形について考える．

そうすると，教科書にもよく載っているように

$4^2=1+3+5+7$

が成り立つ．

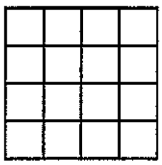


図１

ここで，図２のように見ると

$4^2=(1+2+3)$
$\qquad+(1+2+3+4)$

であることが分かる．

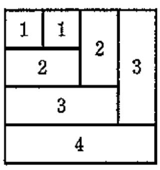


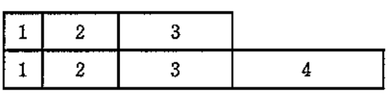

図２

このことは

$$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=\sum_{k=1}^{4}(k-1)+\sum_{k=1}^{4}k$$

からも分かる．

図２を並べかえると，$4^2$ の正方形は，次のような図形に直せる．




(2)　$2^2$，$3^2$ の正方形は

$2^2=1+(1+2)$

$3^2=(1+2)$
$\qquad+(1+2+3)$

より，図３，図４のように直せる．

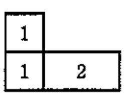



図３

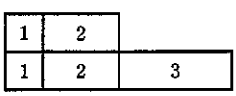
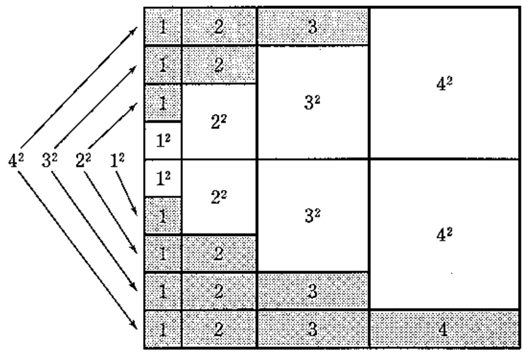



図４

(3)　(1)，(2)の図形を下のように並べる．




上の図から

$3\times(1^2+2^2+3^2+4^2)$
$=(1+2+3+4)\times(2\times4+1)$
$=\dfrac{4(4+1)}{2}\times(2\times4+1)$

が成り立つことは，すぐに分かるのではないだろうか．

こんな簡単なことに気が付かなかったことは残念なことだ．

さらに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ を図形的に説明する方法がないか考えたら，次のことに気が付いた．

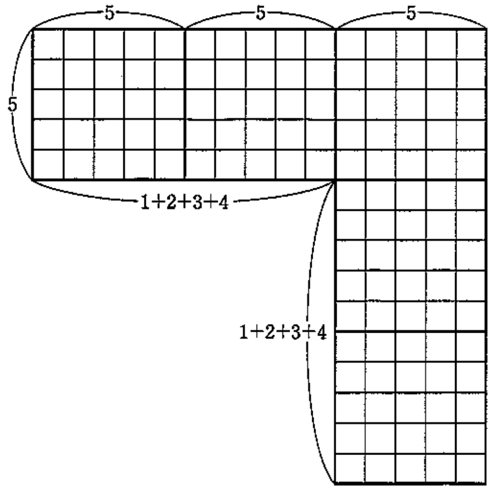
(4)　$5^2=(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)$

を利用すると

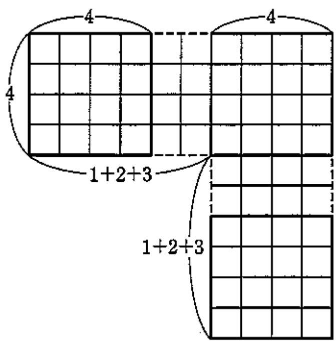
$5^3=5^2\times5$
$\quad=\{(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)\}\times5$

これを平面的な図形にすると次のようになる．

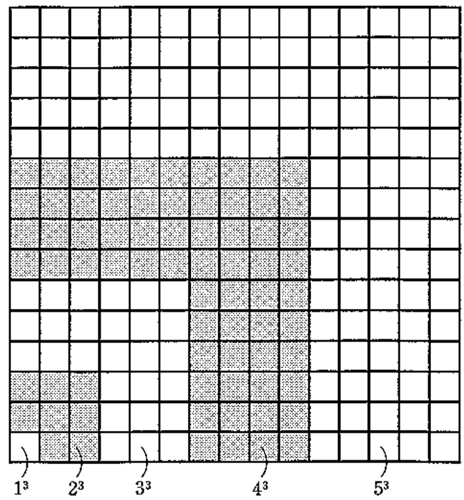
(正方形が $5^3$ 個あることはすぐに分かると思う)




(5)　$4^3$ については次のような図形になる．




(6)　同様に，$1^3$，$2^3$，$3^3$ の図形を考え，下のように並べる．




この図から

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 &= (1+2+3+4+5)^2 \\
&= \left\{\frac{5(5+1)}{2}\right\}^2
\end{aligned}
$$

とすぐ分かってしまう．

(福井県立足羽高等学校)