数学の精密性を感じとる学習の必要性

富永　雅（とみなが　まさる）

1. はじめに

大学からの影響で私はいまだに数学を扱うときには，問題を解くことよりも扱われている定義や定理にまず関心を抱いてしまうことがある．それは，定義できないものを定義しようとしたり，導くことのできない関係を導こうとしても数学的に意味をなさないからであるが，小・中・高等学校では定義や定理について，充分に議論する機会がなく理想的状態において問題解答を行うことのみに注意が向けられているようである．

例えば，円や球に関する公式に出てくる円周率πが無理数であることを，数学的に示されていないことについて不思議に思う人もいるのではないだろうか．それぞれの学年でこれらの公式を学習し，それを利用して問題を解くことに意味があると思われるため現状を否定するつもりはないが，やはり数学的に無理数円周率πの扱いに違和感を感じる．

近年，飛鳥の遺跡から，国内最古の貨幣と思われる「富本銭」が見つかり，これまでの「和同開珎」を最古の貨幣とする歴史が覆った．この発見は，歴史を塗りかえる大きな発見であり，今後どのように展開していくか，とても興味深い話題であるが，一方数学ではこのような事態，つまり数学的事柄が覆るようなことはない．なぜなら，すべて何ら矛盾の起こることなく論理的に議論が進められていく数学においては，誰がその事柄を求めようとも同じ結論が得られ，そしてその結論はいかに時代を隔てようとも不変であるからである．それ故に，数学には精密さとその根拠が求められ，だからこそ前述のような違和感を覚えてしまうのである．

本稿では，「極限」指導の中から得られた数学の精密性に関してメモする．

2. 極限を求めるときに生じる問題

ある数列$\{a_n\}$において，nを充分に大きくするときa_nが一定の値αに近づけばその値αは極限値と言われる．私自身，数学IIIの授業を担当する中で，生徒のもつ極限に関係するイメージに興味深い点を感じたので，そのことから話を展開していきたい．

そもそも，初めて極限に関することを学習する生徒にとって，無限大∞をきちんと把握していない段階では，「nを充分に大きくする（$n\to\infty$）」という表現はそれだけではある意味不親切で，その結果例えば「∞と $\infty+1$ とはどちらが大きいか？」という質問をすると何の迷いもなく「$\infty+1$ です.」という返答がなされる．つまり，無限大∞でも通常の演算が保証されていると感じてしまっていた．

さらに，無限級数の和についても同様のことがいえるようである．例えば，数列$\{a_n : a_n=(-1)^{n-1}\}$において$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$の計算をさせると生徒は「発散する（振動する）」と答える．しかし，「$\lim\sum a_k$の計算を

$$1+(1+(-1))+(1+(-1))+\cdots\cdots=1+0+0+\cdots\cdots=1$$

と考えれば1を極限値にもつのではないかな？」と質問すると，「それでもやはり発散すると思うが，もしかしたら極限の和は1なのかな？」と感じはじめる．加えて，「$\lim\sum a_k$の計算を

$$(1+(-1))+(1+(-1))+\cdots\cdots=0+0+\cdots\cdots=0$$

と考えれば0を極限値にもつのではないかな？」と質問すると，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$の計算結果が「発散する（振動する）」ということに自信がもてなくなってしまう．ここで問題なのは，「振動する無限級数は，一定の値に収束しない.」と書かれた教科書の記述を素直に受け入れはするものの，「無限級数が収束するには，与えられた級数に依存してただ一つの極限値が存在しなければならない」という認識がないことにあると思われる．また，この例では，数列$\{\sum a_k : k=1, 2, \cdots\cdots, n\}$において $n\to\infty$ としたとき極限を定めることができないので，無限大∞における計

算をする際には，かっこ“( )”をつけることが保証されていないことを示していることにもなる．

極限に関して高校では，この他にもいくつかの点において，明確な説明がなされていないようである．そのうち著者自身がもっとも気になる例として次の二つを挙げる．

その一つが関数の極限値の一性質としてあげられている

$$\lim\{hf(x)+kg(x)\}=h\lim f(x)+k\lim g(x)$$

という関係式である．(勿論このとき，$f(x)$，$g(x)$ の極限は有限値とする．) このことを明確に証明するには $\varepsilon-\delta$ 論法がよいが，高校では扱われないため証明はきちんとなされていない．しかし，この関係は後に，微分法や積分法を学習する中で多く用いられている．その中で適切な用い方をするためにも証明は必要だと思われる．現在の状況下では直感に頼っているところが大きいが，このような学習を続けると，例えば大学で重積分を学習するとき，無条件に積分の順序変更を行うなどの誤った計算をしてしまうであろう．

もう一つは，定積分と面積の関係としてよく取り上げられている

$$\int f(x)dx=\lim f(x_k)\varDelta x$$

という関係式である．教科書では，ある区間において曲線 $f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を細かく長方形に分けて考えることにより，この関係式が導かれている．ただこのとき，その長方形は面積 S を下から近似しているときと，上から近似しているときとの二通りがあり，いずれも長方形を細かくすればするほど(つまり極限をとることで)同じ値に収束し，その値が求める面積 S になる．しかし，どうしても長方形に強くこだわり，左辺は上で述べたようなただ一つに定まる極限の値を表しているということが，理解しづらいようである．(極限への明確な理解がなされていないこともその一因であろう．)

3. まとめ

明確な証明がなされていない高校までの学習の例を取り上げてみた．実はここに挙げた例は，授業をする中で生徒から「なぜそのようなことが成り立つのか？」と質問が出たものを中心にしたものである．生徒自身が明確な証明を欲しているこれらの問題に対し，我々は生徒が理解しやすいように説明するよう心がけている．確かに高校までの学習内容を主として説明しなければならないため必ずしも充分でない点もあろうが，精確な解説を示そうとする努力は必要ではないだろうか．

(育英西高等学校)