フィボナッチ数を教室に（II）

宮地（みやじ） 俊彦（としひこ）

この記事は数研通信 No. 41 掲載の「フィボナッチ数を教室に（I）」の続きの記事です．

フィボナッチ数およびリュカ数とは，

$$u_{n+2}=u_n+u_{n+1}\ ;\ u_0=0,\ \ u_1=1$$

$$v_{n+2}=v_n+v_{n+1}\ ;\ v_0=2,\ \ v_1=1$$

で定義される数であった．

今回はフィボナッチ数やリュカ数の間に成り立つ多くの関係について調べる．ここにおいて α と β とは，

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

を表すものとする．

n	u_n	v_n
0	0	2
1	1	1
2	1	3
3	2	4
4	3	7
5	5	11
6	8	18
7	13	29
8	21	47
9	34	76
10	55	123
11	89	199
12	144	322
13	233	521
14	377	843
15	610	1364
16	987	2207
17	1597	3571
18	2584	5778
19	4181	9349
20	6765	15127
21	10946	24476
22	17711	39603
23	28657	64079
24	46368	103682
25	75025	167761
26	121393	271443
27	196418	439204
28	317811	710647
29	514229	1149851
30	832040	1860498

生徒に自分で上記の表を作成させ，実際に(28)と(29)の右辺の操作をすると大いに興味を引かれるようで，授業に集中してくれる．

3. 加法定理，その他の公式

3.1 行列を利用して

前回に導いた結果(13)を用いる．それは

$$H^n=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}u_{n-1} & u_n\\ u_n & u_{n+1}\end{pmatrix}$$

であったが，$H^{n+k}=H^n\cdot H^k$ であることを用いると，

$$\begin{pmatrix}u_{n+k-1} & u_{n+k}\\ u_{n+k} & u_{n+k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n-1} & u_n\\ u_n & u_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{k-1} & u_k\\ u_k & u_{k+1}\end{pmatrix}$$

両辺の（1，2）成分を比較すると

$$u_{n+k}=u_{n-1}u_k+u_nu_{k+1} \tag{27}$$

が成り立つ．これは三角関数の加法定理と似ているので，フィボナッチ数の加法定理という．ここで k を $n-1$，n に変え $u_{n-1}+u_{n+1}=v_n$ を用いると，次の結果を得る．

$$u_{2n-1}=u_{n-1}{}^2+u_n{}^2 \tag{28}$$

$$u_{2n}=u_n(u_{n-1}+u_{n+1})=u_nv_n \tag{29}$$

となる．(28)の結果は，連続したフィボナッチ数の2乗の和はフィボナッチ数であることを示す．

また，(29)は表の横に隣り合ったフィボナッチ数とリュカ数をかけると再びフィボナッチ数になることを主張している．

次に，(27)，(28)，(29)を用いて三倍角の公式に相当する等式を導いてみよう．

$$\begin{aligned}u_{n+2n}&=u_{n-1}u_{2n}+u_nu_{2n+1}\\&=u_{n-1}u_n(u_{n+1}+u_{n-1})+u_n(u_n^2+u_{n+1}^2)\\&=u_{n-1}(u_{n+1}-u_{n-1})(u_{n+1}+u_{n-1})\\&\quad+u_n^3+(u_{n+1}-u_{n-1})u_{n+1}^2\\&=u_{n-1}u_{n+1}^2-u_{n-1}^3+u_n^3+u_{n+1}^3-u_{n-1}u_{n+1}^2\end{aligned}$$

従って，次が求められたことになる．

$$u_{3n}=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3 \tag{30}$$

次に(24)を用いてみよう．それは

$$Q^n=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\5&1\end{pmatrix}\right\}^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}v_n&u_n\\5u_n&v_n\end{pmatrix}$$

であった．前と同様に $Q^{n+k}=Q^n\cdot Q^k$ なので

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}v_{n+k}&u_{n+k}\\5u_{n+k}&v_{n+k}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}v_n&u_n\\5u_n&v_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_k&u_k\\5u_k&v_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

両辺の (1, 1) 成分および (1, 2) 成分を比較すると次の結果を得る．

$$2v_{n+k}=v_nv_k+5u_nu_k \tag{31}$$

$$2u_{n+k}=v_nu_k+u_nv_k \tag{32}$$

ところで簡単な計算で(30)と類似の等式

$$u_{n+1}^3-u_n^3-u_{n-1}^3=3u_{n-1}u_nu_{n+1}$$

を導くこともできる．

等式(13)は

$$H^n=\begin{pmatrix}u_{n-1}&u_n\\u_n&u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{n-1}&u_n\\u_n&u_{n-1}+u_n\end{pmatrix}$$

であるので

$$H^n=u_{n-1}E+u_nH \tag{33}$$

となる．この両辺を p 乗とすると

$$H^{np}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}u_{n-1}{}^{p-k}u_n{}^kH^k$$

両辺の (1, 2) 成分を比較すると，

$$u_{np}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}u_{n-1}{}^{p-k}u_n{}^ku_k$$

となるが $u_0=0$ であるので

$$u_{np}=\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}u_{n-1}{}^{p-k}u_n{}^ku_k$$

である．右辺の各項はどれも u_n を含んでいるので，次の結果が得られたことになる．

> u_{pn} は u_n で割り切れ，その商は
>
> $$\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}u_{n-1}{}^{p-k}u_n{}^{k-1}u_k \tag{34}$$
>
> である．

3.2 ビネの公式(8)，(9)を用いて

ビネの公式は新しい公式発見の宝庫である．具体例をいくつかあげてみよう．

前回取り上げたシムソンの等式(14)を一般化してみよう．

$$\begin{aligned}&5(u_{n-k}u_{n+k}-u_n^2)\\&=(\alpha^{n-k}-\beta^{n-k})(\alpha^{n+k}-\beta^{n+k})-(\alpha^n-\beta^n)^2\\&=-(\alpha\beta)^{n-k}(\alpha^{2k}+\beta^{2k})+2(\alpha\beta)^n\\&=-(\alpha\beta)^{n-k}\{(\alpha^k-\beta^k)^2+2(\alpha\beta)^k\}+2(\alpha\beta)^n\\&=-(-1)^{n-k}5u_k^2\end{aligned}$$

従ってシムソンの等式を一般化した次が成立する．

$$u_{n-k}u_{n+k}-u_n^2=(-1)^{n-k+1}u_k^2 \tag{35}$$

更に(30)で，フィボナッチ数をリュカ数に替えて考えてみると，

$$\alpha^n=A,\ \ \beta^n=B \tag{36}$$

として，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ に留意すると，

$$\begin{aligned}&v_{n+1}^3+v_n^3-v_{n-1}^3\\&=(\alpha A+\beta B)^3+(A+B)^3-\left(\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}\right)^3\\&=(\alpha A+\beta B)^3+(A+B)^3+(\beta A+\alpha B)^3\\&=(\alpha^3+\beta^3+1)(A^3+B^3)\\&\quad+3\{\alpha\beta(\alpha+\beta)+1\}AB(A+B)\\&=5(A^3+B^3)\end{aligned}$$

となる．次が得られたことになる．

$$5v_{3n}=v_{n+1}^3+v_n^3-v_{n-1}^3 \tag{37}$$

また前節最後に導いたことも，次のように簡単に示すことができる．

$$\begin{aligned}u_{pn}&=\frac{1}{\sqrt{5}}(A^p-B^p)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(A-B)(A^{p-1}+A^{p-2}B+\cdots+B^{p-1})\\&=u_n(A^{p-1}+A^{p-2}B+\cdots+B^{p-1})\end{aligned}$$

u_{pn} は u_p で割り切れ，その商は，(36)の A と B を用いて $A^{p-1}+A^{p-2}B+\cdots+B^{p-1}$ である．

3.3 加法定理を導く

3.1 においては行列を利用して加法定理を導いたが，ここにおいては漸化式を利用する方法について調べる．まず数列 $\{f_n\}$ を考えるが，初期値は具体的に考えないでおく．

$$f_{n+2}=f_n+f_{n+1} \tag{38}$$

そこで f_{k+l} を f_{k-1} と f_k $(l>k-1)$ で表すことにする．

$$f_{k+1}=f_{k-1}+f_k$$
$$f_{k+2}=f_{k-1}+2f_k$$
$$f_{k+3}=2f_{k-1}+3f_k$$
$$f_{k+4}=3f_{k-1}+5f_k$$

従って

$$f_{k+l}=u_l f_{k-1}+u_{l+1}f_k \tag{39}$$

と予想されるが，証明は帰納法で簡単に与えられる．

そこで $f_0=0$，$f_1=1$ とすると，$f_n=u_n$ であるので，前回に導いた

$$u_{k+l}=u_l u_{k-1}+u_{l+1}u_k$$

が得られるし，$f_0=2$，$f_1=1$ とすると $f_n=v_n$ となるので

$$v_{k+l}=v_{k-1}u_l+v_k u_{l+1} \tag{40}$$

を導き出すことができたことになる．この(40)において，$k=n$，$l=n-1$；$k=l=n$ とすると，

$$v_{2n-1}=u_{n-1}v_{n-1}+u_n v_n$$
$$v_{2n}=u_n v_{n-1}+u_{n+1}v_n$$

となる．

4．フィボナッチ数の種々の和

ここにおいては，数Aで学習する階差数列の公式を利用してフィボナッチ数の種々の和について考察をする．階差数列の和の公式とは，

$$\sum_{k=p}^{n}\Delta a_k=a_{n+1}-a_p \tag{41}$$

であった．ここに $\Delta a_k=a_{k+1}-a_k$ を表す．

1° $a_k=u_{k+1}$ とすると

$$\Delta a_k=u_{k+2}-u_{k+1}=u_k,\quad a_0=1$$

であるので

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=u_{n+2}-1 \tag{42}$$

2° $a_k=u_{2k-1}$ とすると

$$\Delta a_k=u_{2k+1}-u_{2k-1}=u_{2k},\quad a_0=1$$

であるので

$$\sum_{k=0}^{n}u_{2k}=u_{2n+1}-1 \tag{43}$$

3° $a_k=u_{2k-2}$ とすると

$$\Delta a_k=u_{2k}-u_{2k-2}=u_{2k-1},\quad a_1=0$$

であるので

$$\sum_{k=1}^{n}u_{2k-1}=u_{2n} \tag{44}$$

4° $a_k=u_{3k-3}$ とすると

$$\Delta a_k=u_{3k}-u_{3k-3}=2u_{3k-2},\quad a_1=0$$

であるので

$$\sum_{k=1}^{n}u_{3k-2}=\frac{1}{2}u_{3n} \tag{45}$$

5° $a_k=u_{3k-1}$ とすると

$$\Delta a_k=u_{3k+2}-u_{3k-1}=2u_{3k},\quad a_1=1$$

であるので

$$\sum_{k=1}^{n}u_{3k}=\frac{1}{2}(u_{3n+2}-1) \tag{46}$$

6° $a_k=u_{k-1}u_k$ とすると

$$\Delta a_k=u_k u_{k+1}-u_{k-1}u_k$$
$$=u_k(u_{k+1}-u_{k-1})=u_k^2$$

であり，$a_1=0$ であるので

$$\sum_{k=1}^{n}u_k^2=u_n u_{n+1} \tag{47}$$

7° $a_k=(-1)^k u_{k-2}$ とすると

$$\Delta a_k=(-1)^{k+1}(u_{k-1}+u_{k-2})=(-1)^{k+1}u_k$$

であり $a_1=-u_{-1}=-1$ であるので

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k=(-1)^{n-1}u_{n-1}+1 \tag{48}$$

8° $a_k=u_{2k}u_{2k-2}$ とすると

$$\Delta a_k=u_{2k}(u_{2k+2}-u_{2k-2})$$
$$=u_{2k}(u_{2k+1}+u_{2k}-u_{2k-2})$$
$$=u_{2k}v_{2k}=u_{4k}$$

であり，$a_1=0$ であるので

$$\sum_{k=1}^{n}u_{4k}=u_{2n}u_{2n+2}=u_{2n+1}^2-1 \tag{49}$$

9° $a_k=ku_{k+1}$ のとき

$$\Delta a_k=(k+1)u_{k+2}-ku_{k+1}$$
$$=k(u_{k+2}-u_{k+1})+u_{k+2}$$

$a_1=1$ であるので

$$\sum_{k=1}^{n}ku_k+\sum_{k=1}^{n}u_{k+2}=(n+1)u_{n+2}-1$$
$$\sum_{k=1}^{n}ku_k+u_{n+4}-1-(u_1+u_2)=(n+1)u_{n+2}-1$$

従って

$$\sum_{k=1}^{n}ku_k=-u_{n+4}+(n+1)u_{n+2}+2 \tag{50}$$

10° $u_{3k-3}=u_k^3+u_{k-1}^3-u_{k-2}^3$

であったので

$$\sum_{k=1}^{n}u_{3k-3}=\sum_{k=1}^{n}u_k^3+\sum_{k=1}^{n}(u_{k-1}^3-u_{k-2}^3)$$
$$\frac{1}{2}(u_{3n-1}-1)=\sum_{k=1}^{n}u_k^3+u_{n-1}^3-u_{-1}^3$$

となるので次が従う．

$$\sum_{k=1}^{n}u_k^3=\frac{1}{2}(u_{3n-1}+1)-u_{n-1}^3 \tag{51}$$

11° $a_k = u_{2k-3}u_{2k-1}$ とすると

$$\Delta a_k = u_{2k-1}u_{2k+1} - u_{2k-3}u_{2k-1}$$
$$= u_{2k-1}(u_{2k+1} - u_{2k-3})$$
$$= u_{2k-1}(u_{2k} + u_{2k-1} - u_{2k-3})$$
$$= u_{2k-1}(u_{2k} + u_{2k-2}) = u_{2k-1}v_{2k-1}$$

であり，$a_1 = u_{-1}u_1 = 1$ であるので

$$\sum_{k=1}^{n} u_{4k-2} = u_{2n-1}u_{2n+1} - 1 = u_{2n}^2 \tag{52}$$

他にも種々求めることができるが，1つ結果だけをあげてこの章を終えることにする．

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)u_k = u_{n+4} - n - 3 \tag{53}$$

5. フィボナッチ数2項間の比

この章にあっては，フィボナッチ数の2項間の比 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ について考察する．

$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\beta^2}{\alpha\beta} = -\beta^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ であり，$\left|\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ であるので

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n} = \frac{\alpha-\beta(\beta/\alpha)^n}{1-(\beta/\alpha)^n} \to \alpha$$

となる．つまり $n\to\infty$ のとき，2項間の比は黄金数 α に収束する．(この α の逆数を黄金数ということもある.) ところで

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n} - \alpha = \frac{\beta^n(\alpha-\beta)}{\alpha^n-\beta^n} = \frac{\beta^n}{u_n}$$

であるが $-1<\beta<0$ であるので，

n が偶数のとき　$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha$

n が奇数のとき　$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha$

となる．また

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = \frac{u_{n+1}u_{n+2} - u_nu_{n+3}}{u_nu_{n+2}}$$

分母については

$$u_{n+1}(2u_n + u_{n-1}) - u_n(2u_{n+1} + u_n)$$
$$= u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n$$

つまり，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = \frac{(-1)^n}{u_nu_{n+2}}$$

となる．いままでの結果をまとめると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha \ \left(=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha = \frac{\beta^n}{u_n} \quad \left(\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}\right| \leqq \frac{1}{u_nu_{n+2}}$$

$$\alpha < \cdots < \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} < \cdots\cdots < \frac{u_5}{u_4} < \frac{u_3}{u_2}$$

$$\frac{u_2}{u_1} < \frac{u_4}{u_3} < \cdots\cdots < \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} < \cdots\cdots < \alpha$$

6. $(q\pm\sqrt{q^2+4p})^n$ について

前回2.5で考えた数列(16)は次のものであった．

$$a_{n+2} = pa_n + qa_{n+1} : a_0 = 0,\ a_1 = 1 \tag{54}$$

ただし，$q^2+4p \neq 0$

これはフィボナッチ数列の多少の一般化であり，前に述べたようにリュカ数列に対応する $\{d_n\}$ は，

$$d_n = pa_{n-1} + a_{n+1} \tag{55}$$

であった．前と全く同様にして，

$$\gamma = \frac{q+\sqrt{q^2+4p}}{2},\quad \delta = \frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2} \tag{56}$$

とおくと，

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{q^2+4p}}(\gamma^n - \delta^n) \tag{57}$$

$$d_n = \gamma^n + \delta^n \tag{58}$$

前と同様にシムソンの公式

$$a_n^2 - a_{n-k}a_{n+k} = (-p)^{n-k}a_k^2 \tag{59}$$

$$d_n^2 - (q^2+4p)a_n^2 = 4(-p)^n \tag{60}$$

等が成り立つことは言うまでもない．

さて(57)と(58)より，

$$\left(\frac{q+\sqrt{q^2+4p}}{2}\right)^n = \frac{d_n + a_n\sqrt{q^2+4p}}{2} \tag{61}$$

$$\left(\frac{q-\sqrt{q^2+4p}}{2}\right)^n = \frac{d_n - a_n\sqrt{q^2+4p}}{2} \tag{62}$$

を導くことができる．これは単に(57)±(58)を考えればよい．

この(61)，(62)に関連する問題が入試において，しばしば取り上げられてきた．3つの例をあげてみよう．[6)]

例1 n が自然数のとき，A_n，B_n は正の整数として

$$(\sqrt{3}+1)^n = A_n\sqrt{3} + B_n$$

と表される．

(i) $(\sqrt{3}-1)^n = (-1)^{n-1}(A_n\sqrt{3} - B_n)$

を証明し，

$$3A_n^2 - B_n^2 = (-1)^{n-1}\cdot 2^n$$

を導け．

(ii) 数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ はそれぞれ関係式

$$A_{n+2}=2A_n+2A_{n+1}$$
$$B_{n+2}=2A_n+2B_{n+1}$$

を満たすことを証明せよ。

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}$ を求めよ。 (三重大)

(54), (55), (61), (62)において $p=q=2$ とすると,

$$(\sqrt{3}+1)^n=a_n\sqrt{3}+d_n/2$$
$$(\sqrt{3}-1)^n=a_n\sqrt{3}-d_n/2$$

つまり

$$A_n=a_n,\quad B_n=d_n/2$$

である。具体的に計算してみると

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	1	2	6	16	44	120	328
d_n	2	2	8	20	56	152	416	1136

例2 n を自然数とし

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2n-1}=A_n\sqrt{2}+B_n\sqrt{3}$$

とおく。

(i) この式を満足する正の整数 A_n, B_n が存在することを数学的帰納法により証明せよ。

(ii) $2A_n^2-3B_n^2$ を求めよ。

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。 (東京水産大)

(54), (55), (61), (62)において, $p=-1$, $q=2\sqrt{3}$ とすると,

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^n=d_n/2+a_n\sqrt{2}$$

つまり $A_n=a_{2n-1}$, $B_n=d_{2n-1}/2\sqrt{3}$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	0	1	$2\sqrt{3}$	11	$20\sqrt{3}$	109
d_n	2	$2\sqrt{3}$	10	$18\sqrt{3}$	98	$178\sqrt{3}$

例3 自然数 n に対して有理数 A_n, B_n を

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{A_n+B_n\sqrt{5}}{2}$$

によって定める。 (広島大)

(i) A_{n+1} および B_{n+1} を A_n, B_n を用いて表せ。

(ii) A_n, B_n は正整数でともに偶数または, ともに奇数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

$p=-1$, $q=3$ とすると,

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{d_n+a_n\sqrt{5}}{2}$$

つまり $A_n=d_n$, $B_n=a_n$

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	0	1	3	8	21	55	144
d_n	2	3	7	18	47	123	322

$$a_{n+2}=-a_n+3a_{n+1}\ ;\ a_0=0,\ a_1=1$$
$$d_{n+2}=-a_{n-1}+a_{n+1}$$

ここで $\{d_n\}$ も $\{a_n\}$ と同じ漸化式を満たすので,

$$a_{n+2}+d_{n+2}=-(a_n+d_n)+3(a_{n+1}+d_{n+1})$$

が成り立ち, $a_0+d_0=2$, $a_1+d_1=4$ なので a_n+d_n $(n\geqq 0)$ は偶数となるので, a_n と d_n との偶奇は一致する。

ところで, ここにおける a_n と d_n を見るとそれらはそれぞれ

$$a_n=u_{2n},\quad d_n=v_{2n} \tag{63}$$

となっている。それは

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}=\frac{d_{2n}+a_{2n}\sqrt{5}}{2}$$

となることより確かめることができるのである。

さて(63)で表されることをより一般的に考えてみよう。[7] まず

$$\begin{cases} x_{n+2}=(-1)^{k-1}x_n+v_kx_{n+1} \\ x_0=0,\ x_1=u_k \end{cases} \tag{64}$$

で定義される数列 $\{x_n\}$ を考える。特性方程式は,

$$t^2-v_kt-(-1)^{k-1}=0$$

である。この2解 α' と β' $(\alpha'>\beta')$ は

$$t=\frac{v_k\pm\sqrt{v_k^2+4(-1)^{k-1}}}{2}$$

であるが, 前回に導いた関係式(25)より

$$v_k^2+4(-1)^{k-1}=5u_k^2$$

であるので, α' と β' は

$$\alpha'=\frac{v_k+u_k\sqrt{5}}{2},\quad \beta'=\frac{v_k-u_k\sqrt{5}}{2}$$

となる。(61), (62)において $p=q=1$ とすると,

$$\alpha^k=\frac{v_k+u_k\sqrt{5}}{2},\qquad \beta^k=\frac{v_k-u_k\sqrt{5}}{2}$$

であるので

$$\alpha'=\alpha^k,\qquad \beta'=\beta^k$$

となる。また

$$x_1-\alpha'x_0=u_k,\quad x_1-\beta'x_0=u_k$$

であるので,

$$x_{n+1}-\alpha'x_n=x_1(\beta')^n=u_k\beta^{nk}$$
$$x_{n+1}-\beta'x_n=x_1(\alpha')^n=u_k\alpha^{nk}$$

となり

$$(\alpha^k-\beta^k)x_n=u_k(\alpha^{nk}-\beta^{nk})$$

であるので，次のことが示されたことになる．

> (64)で定義される数列 $\{x_n\}$ について
> $$x_n=u_{kn}$$
> が成り立つ．

いくつか例をあげる．

$k=3$ とすると

$$x_{n+2}=x_n+4x_{n+1},\ x_0=0,\ x_1=2$$

のとき

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	2	8	34	144	610

となり，確かに $x_n=u_{3n}$ となっている．

前回フィボナッチの数列にあっては負の数 n に対しても u_n が定義できることを注意していたが，(64)において $k=-1$ とすると，$v_{-1}=-1$，$u_{-1}=1$ であるので，

$$x_{n+2}=x_n-x_{n+1}\ ;\ x_0=0,\ x_1=1$$

とすると，

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	1	-1	2	-3	5

というように $x_n=u_{-n}$ となっている．

次に行列については

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}u_{n-1} & u_n\\ u_n & u_{n+1}\end{pmatrix} \tag{65}$$

であったが，これを漸化式(64)を手掛かりに，多少一般化して考えてみよう．

途中は省略して結果のみ記すと，

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ (-1)^{k-1} & v_k\end{pmatrix}^n$$
$$=\frac{1}{u_k}\begin{pmatrix}(-1)^{k-1}u_{k(n-1)} & u_{kn}\\ (-1)^{k-1}u_{kn} & u_{k(n+1)}\end{pmatrix} \tag{66}$$

となる．$k=1$ の場合，(65)のときに当たる．

これを用いると，例えば $k=4$ とすると

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 7\end{pmatrix}^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-u_{4n-4} & u_{4n}\\ -u_{4n} & u_{4n+4}\end{pmatrix}$$

というように，いくつでもこのような表現が得られる．

また(64)の左辺の各成分は全て整数であるので，

u_{kn} が u_k で割り切れる

ということが再び示されたことになる．

7．おわりに

フィボナッチ数は私達の身の回りにたくさん存在する．たとえば，

$$n=u_{2k}u_{2k+1}-1,\ \ r=u_{2k}u_{2k-1}-1$$

としたときに，3数 ${}_nC_{r-1}$，${}_{n+1}C_r$，${}_{n+1}C_{r+1}$ は等差数列をなすし，また n と r を

$$n=u_{2k}{}^2,\ \ r=u_{2k-1}{}^2-1$$

としたときには，3数 ${}_{n-1}C_r$，${}_nC_r$，${}_nC_{r+1}$ は等比数列をなす．更に角 θ_n $(0°<\theta_n<90°)$ を

$$\tan\theta_n=\frac{1}{u_n}$$

としたときには，

$$\theta_{2n}=\theta_{2n+1}+\theta_{2n+2}$$

が成り立つこともよく知られたことで，多くの証明を与えられる．この奇数バージョンもある．

チェビシェフの多項式とフィボナッチ数の関係等，書き残された部分の方が多いが紙面の関係上全て割愛しなければならないのは残念なことで，また後日を期したいと思う．

《参　考　文　献》

6）　宮地俊彦　Fibonacci 数の初等的性質(3)
九州数学教育会会誌「情報」109号　1982

7）　宮地俊彦　u_{pn} が u_p で割り切れることの証明
初等数学25号　1992

（福岡県立八幡中央高等学校）