完全順列の出現確率

國井（くにい）　圭巳（としみ）

1. はじめに

新学期が始まったとき，たいていの場合，クラスの座席は出席番号順になっている．そして，１ケ月くらい経てば，くじなどにより席替えをする．そのとき，１つの素朴な疑問が頭に浮かんだ．

「すべての生徒が，前と異なる席につくような席替えは，どのような確率で現れるのだろうか．」

このことについて考えてみた．

2. 完全順列について

１からnまでの自然数の順列で，１が１番目になく，２が２番目になく，……，nがn番目にないようなものを完全順列という．前述の席替えは完全順列である．例えば，$n=2$ のとき，21 の１通り，$n=3$ のとき，231，312 の２通りがある．

n個の自然数を並べてできる完全順列の場合の数W_nは，次のような漸化式で求めることができる．

$$W_1=0,\quad W_2=1,\quad W_{n+1}=n(W_n+W_{n-1})\ (n\geqq 2) \quad \cdots\cdots (*)$$

(証明)　$n+1$ 個の完全順列は，次の２つのパターンで作られる．

(1)　n個の完全順列があるとき，$n+1$ をその後ろにつけて，それと１番目の数字，２番目の数字…，n番目の数字のそれぞれを入れ替えることでできる．

(例)　$n=3$ のときの完全順列 231 の後ろに４をつけて 2314 とし，

４と２を入れ替えて　④３１②

４と３を入れ替えて　２④１③

４と１を入れ替えて　２３④①　とする．

n個の完全順列１通りに対しn通りずつ作られるから，このパターンでできる $n+1$ 個の完全順列は，

$$nW_n \text{ 通り．}$$

(2)　n個の自然数の順列のうち，１個だけ数字aと順番aが一致していて，他は完全順列になっているもの(これを準完全順列と呼ぶ)があるとき，$n+1$をその後ろにつけ，aと $n+1$ を入れ替えることでできる．

(例)　$n=3$ のときの準完全順列 132 の後ろに４をつけて 1324 とし，

４と１を入れ替えて，④３２①　とする．

n個の準完全順列は，1，2，……，nのうち１個だけ一致している数字に $n-1$ 個の完全順列をつけたものだから，全部でnW_{n-1}通りあって，このそれぞれから $n+1$ 個の完全順列が１通りずつ作られるから，このパターンでできるものは，

$$nW_{n-1} \text{ 通り．}$$

(1)，(2)をあわせて

$$W_{n+1}=n(W_n+W_{n-1}) \qquad \text{(証明終)}$$

3. W_n，$P(W_n)$の値について

漸化式(＊)からW_nを一般的にnの式で表すことは困難である．そこで，(＊)から得られるW_nの値および $P(W_n)=\dfrac{W_n}{n!}$ の値を $n\geqq 2$ のいくつかの場合について実験的に計算してみると，次のようになった．

$$W_2=1,\qquad P(W_2)=\frac{1}{2!}=0.5$$

$$W_3=2(W_2+W_1)=2(1+0)=2,$$

$$P(W_3)=\frac{2}{3!}=0.33333\cdots\cdots$$

$$W_4=3(W_3+W_2)=3(2+1)=9,$$

$$P(W_4)=\frac{9}{4!}=0.375$$

$$W_5=4(W_4+W_3)=4(9+2)=44,$$

$$P(W_5)=\frac{44}{5!}=0.36666\cdots\cdots$$

$$W_6=5(W_5+W_4)=5(44+9)=265,$$

$$P(W_6)=\frac{265}{6!}=0.36805\cdots\cdots$$

$W_7=6(W_6+W_5)=6(265+44)=1854,$

$P(W_7)=\dfrac{1854}{7!}=0.36785\cdots\cdots$

$W_8=7(W_7+W_6)=7(1854+265)=14833,$

$P(W_8)=\dfrac{14833}{8!}=0.36788\cdots\cdots$

完全順列の，順列全体にしめる割合 $P(W_n)$ の値は，増加・減少を繰り返しながら，一定値に近づいていく．そこで，$n\to\infty$ としたときの極限値について調べてみた．

4．完全順列の出現確率

$a_n=P(W_n)=\dfrac{W_n}{n!}$ とおく．$(*)$ の両辺を $(n+1)!$ で割ると，

$$\frac{W_{n+1}}{(n+1)!}=n\left(\frac{W_n}{(n+1)!}+\frac{W_{n-1}}{(n+1)!}\right)$$

$$=n\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{W_n}{n!}+\frac{1}{(n+1)n}\cdot\frac{W_{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+\frac{1}{n+1}a_{n-1}$$

$$\therefore\quad (n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$$

$$\therefore\quad (n+1)(a_{n+1}-a_n)=-(a_n-a_{n-1})$$

ここで $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，

$$b_1=a_2-a_1=\frac{1}{2!}-\frac{0}{1!}=\frac{1}{2},$$

$$b_n=-\frac{1}{n+1}b_{n-1}$$

$$=\left(-\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)b_1$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)!}=(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}$$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=0+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

となる．この式で $n\to\infty$ としたときの極限値は，e^x の Taylor 展開

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

において，$x=-1$ とした値

$$e^{-1}=1+\frac{-1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

と一致するから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

となる．この値は，

$$\frac{1}{2.7182818\cdots\cdots}=0.36787\cdots\cdots$$

であるから，十分大きい n に対して，n 個の自然数を並べ替えたとき，完全順列の現れる確率は

約 36.8 %

であることがわかる．

（三重県立名張西高等学校）