いままで出会ったことのない「ある不等式」について

仁平（にへい） 政一（まさかず）

1998年2月に実施された横浜国大の入試問題に，次の問題が出題されていた．

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，常に不等式

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{y} \geqq \sqrt{x+ay}$$

が成り立つような正の定数 a の最大値を求めよ．

(2)　a を(1)で求めた値とする．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ のとき，常に不等式

$$\sqrt{x+y+z}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z} \geqq \sqrt{x+ay+bz}$$

が成り立つような正の定数 b の最大値を求めよ．

面白そうな問題だったので，授業で取り上げ，生徒と一緒に楽しんだ．そのとき，上記の不等式は一般化できるのではないかと「ふと」思った．

職員室に戻り，鉛筆を動かしているうちに，きれいに一般化でき，証明も比較的簡単につけることができた．

その後，おそらく不等式に関する本に載っていることだろうと思い手元にある本(参考文献[1]～[4])で調べてみたところ，見つけることができなかった．また，高校生用の参考書等でもやはり見つけることができなかった．

そこで，本稿では上記の不等式の一般化とそれから得られる2つの不等式について報告する．

定理1　$x_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$，$n \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\sqrt{1^2x_1+2^2x_2+\cdots\cdots+n^2x_n}$$
$$\leqq \sqrt{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}+\sqrt{x_2+\cdots\cdots+x_n}$$
$$+\cdots\cdots+\sqrt{x_{n-1}+x_n}+\sqrt{x_n}$$

証明　n に関する数学的帰納法で証明しよう．

$n=1$ のときは明らかに成立する．

$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k}+\sqrt{x_2+\cdots\cdots+x_k}+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt{x_{k-1}+x_k}+\sqrt{x_k} \geqq \sqrt{1^2x_1+2^2x_2+\cdots\cdots+k^2x_k}.$$

が成り立つ．

証明すべきことは，$n=k+1$ のときに定理の不等式が成り立つことである．

帰納法の仮定より，

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots\cdots+(x_k+x_{k+1})}+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt{x_k+x_{k+1}}+\sqrt{x_{k+1}}$$
$$\geqq \sqrt{1^2x_1+2^2x_2+\cdots\cdots+k^2(x_k+x_{k+1})}+\sqrt{x_{k+1}}$$

が成り立つ．

したがって，$1^2x_1+2^2x_2+\cdots\cdots+k^2x_k=A$ とおくとき，

$$(\sqrt{A+k^2x_{k+1}}+\sqrt{x_{k+1}})^2-(\sqrt{A+(k+1)^2x_{k+1}})^2 \geqq 0$$

が成り立つことを示せばよい．このことは

$$(\sqrt{A+k^2x_{k+1}}+\sqrt{x_{k+1}})^2-(\sqrt{A+(k+1)^2x_{k+1}})^2$$
$$=2\sqrt{x_{k+1}}(\sqrt{A+k^2x_{k+1}}-\sqrt{k^2x_{k+1}}) \geqq 0$$

より示される．よって，数学的帰納法により定理の不等式が証明された．□

定理1の不等式の上界が気になる．そこで上界を見つけてみよう．

いま，式

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}+\sqrt{x_2+\cdots\cdots+x_n}+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt{x_{n-1}+x_n}+\sqrt{x_n}$$

にコーシー・シュワルツの不等式を適用すると

$$1\cdot\sqrt{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}+1\cdot\sqrt{x_2+\cdots\cdots+x_n}+\cdots\cdots$$
$$+1\cdot\sqrt{x_{n-1}+x_n}+1\cdot\sqrt{x_n}$$
$$\leqq \sqrt{1^2+\cdots\cdots+1^2}\sqrt{1x_1+2x_2+\cdots\cdots+nx_n}.$$

となるから，一つの上界が得られた．

定理1とこの結果を合わせると，次の定理2が得られる．

定理 2　$x_i \geqq 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$, $n \geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$\sqrt{1^2x_1+2^2x_2+\cdots\cdots+n^2x_n}$$
$$\leqq \sqrt{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}+\sqrt{x_2+\cdots\cdots+x_n}$$
$$+\cdots\cdots+\sqrt{x_{n-1}+x_n}+\sqrt{x_n}$$
$$\leqq \sqrt{n}\sqrt{1x_1+2x_2+\cdots\cdots+nx_n}$$

上記の定理 2 で，$x_1=n$, $\cdots\cdots$, $x_k=n-k+1$, $\cdots\cdots$, $x_n=1$ とおけば，次の系 1 が得られる．

系 1　$$\frac{n+1}{2}\sqrt{\frac{n(n+2)}{3}}$$
$$\leqq \sqrt{1}+\sqrt{1+2}+\sqrt{1+2+3}+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt{1+2+\cdots\cdots+n}$$
$$\leqq n\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{6}} \quad (n \geqq 1).$$

証明　$$\sum_{k=1}^{n}k^2(n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(n+1)k^2-\sum_{k=1}^{n}k^3$$
$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12},$$
$$\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

これらと定理 2 より所望の不等式が得られる．□

定理 2 で $x_1=1$, $x_2=2$, $\cdots\cdots$, $x_n=n$ とおくと，次の系 2 を得る．

系 2　$$\frac{n(n+1)}{2} \leqq \sqrt{1+2+\cdots\cdots+n}$$
$$+\sqrt{2+3+\cdots\cdots+n}+\cdots\cdots+\sqrt{n-1+n}+\sqrt{n}$$
$$\leqq n\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}} \quad (n \geqq 1).$$

さて，系 1 と系 2 を眺めているうちに，数列

$$a_n=(\sqrt{1}+\sqrt{1+2}+\sqrt{1+2+3}+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt{1+2+\cdots\cdots+n})/n^2$$

や数列

$$b_n=(\sqrt{1+2+\cdots\cdots+n}+\sqrt{2+3+\cdots\cdots+n}+\cdots\cdots$$
$$+\sqrt{n-1+n}+\sqrt{n})/n^2$$

の極限値を求める問題を思いついた．

自分としては，なかなか面白い問題ではないかと思っている（系 1, 2 を用いては解けないので注意されたい）．

いずれも高校の教材の範囲内で求めることができるが，数列 b_n の極限値を求めることは思いの外難しい．

これらの極限値については文献[5]で詳しく論じてあるので必要に応じて参照されたい．

なお，数列 a_n の極限値は $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ で，b_n の極限値は $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}$ である．

《参 考 文 献》

[1] 青柳雅計，大関信雄，不等式，槇書店．

[2] 大関信雄・大関清太，不等式への招待，近代科学社．

[3] E. Beckenbach and R. Bellman, An Introduction to Inequalities, Random House.

[4] G. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press.

[5] 初等数学　第 41 号，発行者　松田康雄

（茨城県立藤代高等学校）