相加・相乗（調和）平均の指導

渋谷（しぶや） 紀興（みちおき）

$a>0$，$b>0$　　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$

相加・相乗平均は理解し難い分野の１つであり，不等式そのものに加え，

① 使う場所が分からない．

② 何故最小値がでてくるのかはっきりしない．

の２点に集約できる．特に，②については調和平均を持ち出すとなおさらのこととなる．

それ故，理解を助けるため次のような指導をした．(説明に当たり $a \geqq b$ としても本質的に変わりないのでこれを前提に使っている)

I　図形を使って相加・相乗（調和）平均の説明

1　一辺が $(a+b)$ の正方形の面積を使っての説明

図１を使って，

$(a+b)^2 \geqq 4ab$

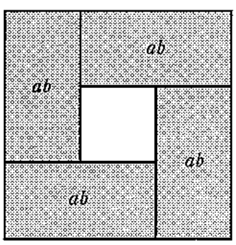
を示し，両辺正より

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

$a=b$ のとき等号が成り立つ．

$\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$



（図１）

2　直角三角形を使っての説明

BD$=a$，DC$=b$，AD$=x$（Dは垂線の足）とすると，図２より

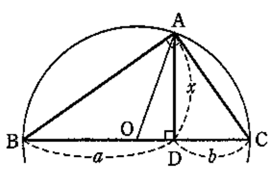
$\triangle$ABD$\backsim\triangle$CAD

$\therefore\ a : x = x : b$

$x^2 = ab$

$x>0$ より　$x=\sqrt{ab}$

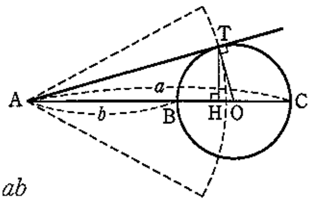
半径 AO$=\dfrac{\text{BC}}{2} \geqq$ AD　　$\therefore\ \dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$



（図２）

3　円と接線を使っての説明

点Aから円Oに引いた接線の接点をTとして，AC$=a$，AB$=b$ とすると，図３より



（図３）

AT^2$=$AB$\cdot$AC$=ab$

AT>0 より

AT$=\sqrt{ab}$

AO$=\dfrac{a+b}{2}$

$\triangle$ATO$\backsim\triangle$AHT より　AT : AH$=$AO : AT

AH$\cdot$AO$=$AT^2

$\therefore$　AH$\cdot\dfrac{a+b}{2} = ab$

AH$=\dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$（調和平均）

AT を半径とする扇形（図の破線）と線分 AC との交点をPとすると

AT$=$AP

AO$\geqq$AP$\geqq$AH より　　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \dfrac{2ab}{a+b}$

4　各平均のグラフを使っての説明

$b=ka$ $(k>0)$ とおくと

相加平均　$\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a+ka}{2} = \dfrac{(k+1)}{2}a$

$y=\dfrac{k+1}{2}$　…… ①

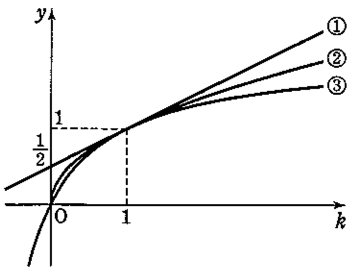
相乗平均　$\sqrt{ab} = \sqrt{a^2k} = a\sqrt{k}$　$(a>0)$

$y=\sqrt{k}$　…… ②

調和平均　$\dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2a\cdot ka}{a+ak} = \dfrac{2k}{k+1}a$

$y=\dfrac{2k}{k+1} = \dfrac{-2}{k+1}+2$　…… ③

よって，①，②，③のグラフを比較することにより大小が見える．



II　最小値を求める問題に関して

例1　$a>0$ のとき $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ を示せ．(最小値2を示せ)

(相加平均)≧(相乗平均)より

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

よって，最小値2

$$\left(\text{等号成立は } a=\frac{1}{a} \text{ すなわち } a=1 \text{ のとき}\right)$$

この説明ではもっともと思いながらも，何か腑に落ちないところがある．それは最初に記した①，②に係わることと思える．そのために

$a>0$，$b>0$

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}+\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

$$a+b=2\sqrt{ab}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

と等式にして説明すればすっきりすると思う．

解　$a+\dfrac{1}{a}=2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}+\left(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)^2$

$\therefore\quad a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$

等号成立は $a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $a=1$ のとき．

例1が示すように基本的に相乗平均が定数となる場合，言い換えると2数 a，b に $ab=k$ (k は定数)の関係がある場合に最小値を求め得る．

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)^2\geqq 0$ より，最小値2をとることが明確となる．

例2　a，b が正の数のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqq 4$$

解　$a+\dfrac{1}{b}=2\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\left(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{1}{b}}\right)^2$　…… ①

$b+\dfrac{1}{a}=2\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\left(\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)^2$　…… ②

①×②より

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=4\sqrt{\frac{ab}{ab}}+2\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\sqrt{b}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2\left(\sqrt{b}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$$

$\left(\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)^2\geqq 0$，$\left(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{1}{b}}\right)^2\geqq 0$ であり，

$\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{1}{a}}=0$，$\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{1}{b}}=0$ が同時に成立し得るから

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqq 4$$

等号成立は $a=\dfrac{1}{b}$，$b=\dfrac{1}{a}$ すなわち $ab=1$ のとき．

例3　任意の正の数 a，b について

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{3}{a}\right)\geqq\boxed{}+\sqrt{\boxed{}}$$

が成立する．上の式で等号が成り立つのは

$ab=\sqrt{\boxed{}}$ のときである．

$a+\dfrac{2}{b}=2\sqrt{\dfrac{2a}{b}}+\left(\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{2}{b}}\right)^2$　…… ①

$b+\dfrac{3}{a}=2\sqrt{\dfrac{3b}{a}}+\left(\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{3}{a}}\right)^2$　…… ②

$\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{2}{b}}=0$，$\sqrt{b}-\sqrt{\dfrac{3}{a}}=0$ が同時に成り立たないので，例2のように ①×② のようにして求められない．

解　$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)=ab+5+\dfrac{6}{ab}$

$=5+2\sqrt{\dfrac{6ab}{ab}}+\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\dfrac{6}{ab}}\right)^2$

よって　$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{3}{a}\right)\geqq 5+2\sqrt{6}=5+\sqrt{24}$

等号成立は $ab=\dfrac{6}{ab}$ すなわち $ab=\sqrt{6}$ のとき．

III　調和平均を使った問題

例4　x，y の逆数の和が $\dfrac{1}{3}$ のとき，$x+y$，xy の最小値を求めよ．($x>0$，$y>0$ とする)

解 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}\geqq\frac{2xy}{x+y}=6$$

xy の最小値 36

$x+y$ の最小値 12（ともに $x=y=6$ のとき）

（参考） $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-3}{3x}$

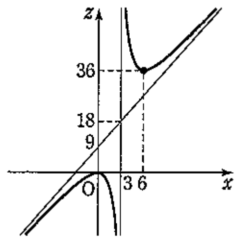
$\therefore\ y=\dfrac{3x}{x-3}$

$z=xy$ とおくと

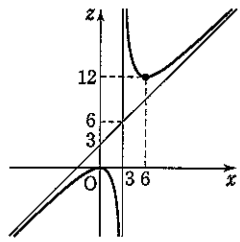
$$z=x\frac{3x}{x-3}=3x+9+\frac{27}{x-3}\quad（グラフ 1）$$

同様に $z=x+y$ とおくと

$$z=x+\frac{3x}{x-3}=x+3+\frac{9}{x-3}\quad（グラフ 2）$$



グラフ 1



グラフ 2

（岐阜県立海津高等学校）

発行所 **数研出版株式会社**

東京本社 〒102-0073 東京都千代田区九段北 1-12-11 TEL 03(3265)0811（代表）
関西本社 〒604-0867 京都市中京区烏丸丸太町西入ル TEL 075(231)0161（代表）
さいたま支局 〒336-0018 さいたま市南本町 1-16-9-4F
札幌支店 〒060-0052 札幌市中央区南 2 条東 2 丁目 9-8 大都ビル TEL 011(261)1723
仙台支店 〒980-0022 仙台市青葉区五橋 2-7-9 TEL 022(215)6933
横浜支店 〒222-0033 横浜市港北区新横浜 2-14-27 第一生命第 2 ビル
名古屋支店 〒461-0004 名古屋市東区葵 3-15-31 住友生命千種ビル TEL 052(937)3423
広島支店 〒730-0813 広島市中区住吉町 9-9 中木ビル TEL 082(243)6453
福岡支店 〒812-0016 福岡市博多区博多駅南 1-2-3 住友博多駅前ビル TEL 092(411)4245

印刷 寿印刷株式会社 011201

本書の中紙には再生紙を使用しています