2数$\sqrt[m]{a}$と$\sqrt[n]{b}$の大小関係について

結川（ゆいかわ）　義明（よしあき）

累乗根で表された数の大小を比べる場合，一般に次のような方法を用いている．

例えば，$\sqrt[4]{3}$ と $\sqrt[5]{5}$ の大小の場合，2数を20乗して比較する．

$$(\sqrt[4]{3})^{20}=(\sqrt[4]{3^4})^5=3^5=243$$

$$(\sqrt[5]{5})^{20}=(\sqrt[5]{5^5})^4=5^4=625$$

よって，　$(\sqrt[4]{3})^{20}<(\sqrt[5]{5})^{20}$

ゆえに，　$\sqrt[4]{3}<\sqrt[5]{5}$

具体的な数値がわからない4乗根や5乗根で表された数でも，この方法を用いれば大小を比較することができるという意味で，数学的な考え方の良さを認識させる一つの題材といえる．

しかし，この方法はすべての場合に適用するには無理がある．例えば，この方法で $\sqrt[21]{3}$ と $\sqrt[31]{5}$ を比較した場合，

$$(\sqrt[21]{3})^{21\cdot31}=(\sqrt[21]{3^{21}})^{31}=3^{31}$$

$$(\sqrt[31]{5})^{21\cdot31}=(\sqrt[31]{5^{31}})^{21}=5^{21}$$

となり，8桁表示機能をもつ電卓でさえも 5^{12} で容量を越えてしまい，求めることができず比較できないのである．(手計算でひたすらやれば比較可能ではあるが現実的には不可能であろう)

このような2数の大小も常用対数(表)を用いれば，以下のように容易に比較することができる．

すなわち，

$$\log_{10}\sqrt[21]{3}=\log_{10}3^{\frac{1}{21}}=\frac{1}{21}\log_{10}3$$

$$=\frac{1}{21}\times0.4771\fallingdotseq0.022719$$

同様に，

$$\log_{10}\sqrt[31]{5}=\log_{10}5^{\frac{1}{31}}=\frac{1}{31}\log_{10}5$$

$$=\frac{1}{31}\times0.6990\fallingdotseq0.022548$$

よって，　$\log_{10}\sqrt[31]{5}<\log_{10}\sqrt[21]{3}$

$y=\log_{10}x$ は増加関数より　$\sqrt[31]{5}<\sqrt[21]{3}$

高校の数学授業は解法テクニックの習得部分に偏るきらいがあり，生徒に思考させる部分が少ない気がしているのは私だけの感想ではないであろう．時に通常の解法テクニックでは解けないような問題を考えさせることも大切であり，また，このような問題を考えさせることにより，常用対数(表)の有用性も認識させることができるのではないかと考える．

さらに，常用対数を用いれば5の m 乗根 $\sqrt[m]{5}$ と3の n 乗根 $\sqrt[n]{3}$ の不等号の向きがどのような場合に入れ替わるのかも容易に求めることができ，この2数の大小関係の間には次のことが成り立つこともわかる．

> $\dfrac{m}{n}\lesseqgtr\dfrac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\iff\sqrt[m]{5}\gtreqless\sqrt[n]{3}$　(複号同順)
>
> ただし，m，$n=2$，3，4，……

[証明]　$\sqrt[m]{5}>\sqrt[n]{3}$ の両辺の常用対数をとって

$$\log_{10}\sqrt[m]{5}>\log_{10}\sqrt[n]{3}$$

左辺−右辺$=\log_{10}\sqrt[m]{5}-\log_{10}\sqrt[n]{3}$

$$=\frac{1}{m}\log_{10}5-\frac{1}{n}\log_{10}3$$

$$=\frac{\log_{10}3}{m}\left(\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}-\frac{m}{n}\right)>0$$

ここで，$\log_{10}3>0$，$m>0$ より

$$\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}-\frac{m}{n}>0$$

$$\frac{m}{n}<\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}$$

$\sqrt[m]{5}<\sqrt[n]{3}$ についても同様．　(証明終)

この式から $\sqrt[31]{5}<\sqrt[n]{3}$ となる n は

$$n<\frac{\log_{10}3}{\log_{10}5}\times31=\frac{0.4771}{0.6990}\times31\fallingdotseq21.2$$

ゆえに，　$\sqrt[31]{5}<\sqrt[21]{3}$

一般に，累乗根で表された2数 $\sqrt[m]{a}$ と $\sqrt[n]{b}$ の大小関係について，次の【命題1】が成り立つ．

【命題１】

> (i)　$b>1$ のとき
>
> $$\frac{m}{n} \lesseqgtr \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \iff \sqrt[m]{a} \gtreqless \sqrt[n]{b}$$
>
> (ii)　$a<1$ のとき
>
> $$\frac{m}{n} \gtreqless \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \iff \sqrt[m]{a} \gtreqless \sqrt[n]{b}$$
>
> （複号同順）
>
> 特に，$b<1<a$ のとき　　$\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$
>
> ただし，$a>b>0$ (a, $b \neq 1$),
>
> m, $n=2$, 3, 4, ……

［証明］ $\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$ の場合のみ示す．

$\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$ の両辺の常用対数をとって

$$\log_{10}\sqrt[m]{a}>\log_{10}\sqrt[n]{b}$$

$$\text{左辺}-\text{右辺}=\log_{10}\sqrt[m]{a}-\log_{10}\sqrt[n]{b}$$

$$=\frac{1}{m}\log_{10} a-\frac{1}{n}\log_{10} b$$

$$=\frac{\log_{10} b}{m}\left(\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}-\frac{m}{n}\right)$$

(i)　$b>1$ のとき

$\frac{\log_{10} b}{m}\left(\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}-\frac{m}{n}\right)>0$ となるのは

$\log_{10} b>0$, $m>0$ より

$$\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}-\frac{m}{n}>0$$

ゆえに，　$\frac{m}{n}<\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

(ii)　$a<1$ のとき

$\frac{\log_{10} b}{m}\left(\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}-\frac{m}{n}\right)>0$ となるのは

$\log_{10} b<0$, $m>0$ より

$$\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}-\frac{m}{n}<0$$

ゆえに，　$\frac{m}{n}>\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$

特に，$b<1<a$ のとき $\log_{10} a>0$, $\log_{10} b<0$ より

$$\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}<0<\frac{m}{n}$$

すなわち，　$\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}-\frac{m}{n}<0$

よって，$\frac{\log_{10} b}{m}\left(\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}-\frac{m}{n}\right)>0$ となり

$\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$　　（証明終）

（例１）　$a=5$, $b=3$ のとき

	$\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{b}$
$m=2$	$n=2, 3, 4, \cdots$	
$m=3$	$n=3, 4, 5, \cdots$	$n=2$
$m=4$	$n=3, 4, 5, \cdots$	$n=2$
$m=5$	$n=4, 5, 6, \cdots$	$n=2, 3$
$m=6$	$n=5, 6, 7, \cdots$	$n=2, 3, 4$
$m=7$	$n=5, 6, 7, \cdots$	$n=2, 3, 4$
$m=8$	$n=6, 7, 8, \cdots$	$n=2, 3, 4, 5$
$m=9$	$n=7, 8, 9, \cdots$	$n=2, 3, 4, 5, 6$
$m=10$	$n=7, 8, 9, \cdots$	$n=2, 3, 4, 5, 6$

（例２）　$a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{2}{3}$ のとき

	$\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[m]{a}<\sqrt[n]{b}$
$m=2$	$n=2$	$n=3, 4, 5, \cdots$
$m=3$	$n=2, 3, 4$	$n=5, 6, 7, \cdots$
$m=4$	$n=2, 3, 4, 5$	$n=6, 7, 8, \cdots$
$m=5$	$n=2, 3, 4, 5, 6, 7$	$n=8, 9, 10, \cdots$
$m=6$	$n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$	$n=9, 10, 11, \cdots$
$m=7$	$n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	$n=10, 11, 12, \cdots$
$m=8$	$n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$	$n=12, 13, 14, \cdots$
$m=9$	$n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$	$n=13, 14, 15, \cdots$
$m=10$	$n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$	$n=15, 16, 17, \cdots$

さらに，【命題１】に条件を付加することにより，次の【命題２】が成り立つ．

【命題２】

> (i)　$b>1$ のとき
>
> $$a^b \gtreqless b^a,\ an \gtreqless bm \Longrightarrow \sqrt[m]{a} \gtreqless \sqrt[n]{b}$$
>
> （複号同順）
>
> (ii)　$a<1$ のとき
>
> $$an<bm \Longrightarrow \sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$$
>
> 特に，$b<1<a$ のとき　　$\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$
>
> ただし，$a>b>0$ (a, $b \neq 1$),
>
> m, $n=2$, 3, 4, ……

［証明］ (i) $b>1$ のとき，$a^b>b^a$ の場合のみ示す．

$a^b>b^a$ の両辺の常用対数をとって

$$\log_{10}a^b>\log_{10}b^a$$

$$b\log_{10}a>a\log_{10}b \quad \cdots\cdots ①$$

①の両辺を $b\cdot\log_{10}b$ で割ると

$$\frac{\log_{10}a}{\log_{10}b}>\frac{a}{b} \quad (\because \ b>1 \text{ より } \log_{10}b>0)$$

また，$an>bm$ より $\dfrac{a}{b}>\dfrac{m}{n}$

よって，$\dfrac{\log_{10}a}{\log_{10}b}>\dfrac{a}{b}>\dfrac{m}{n}$

ゆえに，【命題１】より $\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$

(ii) $a<1$ のとき 指数関数 $y=a^x$ は減少関数．

したがって，$a^b>a^a$

また，$a>b$ より $a^a>b^a$

よって，$a^b>b^a$

$a^b>b^a$ の両辺の常用対数をとって

$$\log_{10}a^b>\log_{10}b^a$$

$$b\log_{10}a>a\log_{10}b \quad \cdots\cdots ①$$

①の両辺を $b\cdot\log_{10}b$ で割ると

$$\frac{\log_{10}a}{\log_{10}b}<\frac{a}{b} \quad (\because \ b<1 \text{ より } \log_{10}b<0)$$

また，$an<bm$ より $\dfrac{a}{b}<\dfrac{m}{n}$

よって，$\dfrac{\log_{10}a}{\log_{10}b}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{m}{n}$

ゆえに，【命題１】より $\sqrt[m]{a}>\sqrt[n]{b}$

（証明終）

（例１） $\sqrt[25]{3}$ と $\sqrt[17]{2}$ の大小比較

$a^b-b^a=3^2-2^3=9-8=1>0$ かつ

$an-bm=3\cdot17-2\cdot25=51-50=1>0$ より

$$\sqrt[25]{3}>\sqrt[17]{2}$$

ちなみに，

$$\sqrt[25]{3}\fallingdotseq1.044924,\ \sqrt[17]{2}\fallingdotseq1.041616$$

である．

（例２） $\sqrt[16]{7}$ と $\sqrt[11]{5}$ の大小比較

$a^b-b^a=7^5-5^7=16807-78125=-61318<0$

かつ $an-bm=7\cdot11-5\cdot16=77-80=-3<0$ より

$$\sqrt[16]{7}<\sqrt[11]{5}$$

ちなみに，

$$\sqrt[16]{7}\fallingdotseq1\ 129324,\ \sqrt[11]{5}\fallingdotseq1.157558$$

である．

（例３） $\sqrt[23]{\dfrac{1}{2}}$ と $\sqrt[15]{\dfrac{1}{3}}$ の大小比較

$an-bm=\dfrac{1}{2}\times15-\dfrac{1}{3}\times23=-\dfrac{1}{6}<0$ より

$$\sqrt[23]{\frac{1}{2}}>\sqrt[15]{\frac{1}{3}}$$

ちなみに，

$$\sqrt[23]{\frac{1}{2}}\fallingdotseq0\ 970313,\ \sqrt[15]{\frac{1}{3}}\fallingdotseq0.929377$$

である．

【命題２】による累乗根で表された２数 $\sqrt[m]{a}$ と $\sqrt[n]{b}$ の大小比較は a，b の値が小さく（a^b かつ b^a の値が８桁表示機能をもつ電卓で計算可能），m，n の値がかなり大きい（a^n かつ b^m の値が８桁表示機能をもつ電卓で計算不可能）場合，適用範囲に限定はあるが，有効に活用できるのではないかと考える．

（埼玉県立志木高等学校）