正射影でござる

松田（まつだ）　康雄（やすお）

1. はじめに

2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積の定義は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ ($0°\leqq\theta\leqq 180°$) としたとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad \cdots\cdots (1)$$

である．また，成分で考えたとき，$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$ ならば

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2 \qquad \cdots\cdots (2)$$

である．さてここで，$\vec{b}$ の，$\vec{a}$ 方向への正射影ベクトル，すなわち $\vec{b}$ の始点と終点を，$\vec{a}$ を通る直線の上に下ろした垂線の足をそれぞれ始点と終点とするベクトルを考えてみる．

この正射影ベクトルの大きさは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすれば，$|\vec{b}||\cos\theta|$ なので，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ と，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルの大きさの積である．ただし，$\vec{b}$ の正射影ベクトルが $\vec{a}$ と反対向きなら，積の値はマイナスとみなす．　　$\cdots\cdots$ (3)

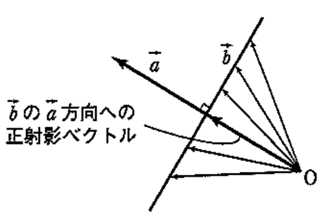
とも定義できる．本稿は，この定義(3)をもとにして，図形の方程式などを見直したものである．

2. 直線のベクトル方程式

法線ベクトルが $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$ の直線上の任意の点の位置ベクトルを $\vec{b}=(x,\ y)$ とする．$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルの大きさは一定である．したがって，定義(3)から，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ も一定である．その値を c とすると，直線の方程式は，$\vec{a}\cdot\vec{b}=c$ から

$$x_1x+y_1y=c$$

で表される．

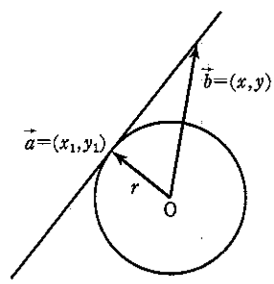


逆に，$\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルが一定のベクトルの終点の軌跡は，$\vec{a}$ を法線とする直線であることが分かる．

これらのことは，3次元における法線ベクトルと平面の関係へと拡張できるが，現行の高校数学ではこのことは学ばない．

3. 円の接線の方程式

原点中心，半径 r の円の周上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めてみる．



$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$ とし，接線上の点の位置ベクトルを $\vec{b}=(x,\ y)$ とおく．$|\vec{a}|$ も，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルの大きさも，いずれも r なので $\vec{a}\cdot\vec{b}=r^2$．これを成分で表すと，接線の方程式

$$x_1x+y_1y=r^2$$

が得られる．

4. 点と直線との距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離 d を求めてみる．

直線の法線ベクトルを $\vec{a}=(a,\ b)$ とし，直線上の任意の点 $(x,\ y)$ に対して

$b=(x-x_1,\ y-y_1)$ とおき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を点 $(x_1,\ y_1)$ にそろえておく．$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルの大きさが d なので，

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|d.$$

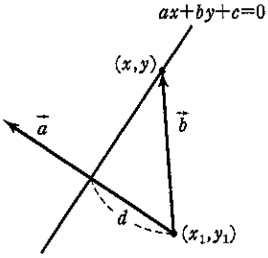
成分で考えて

$$|a(x-x_1)+b(y-y_1)|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot d.$$

これに $ax+by=-c$ を代入して整理すると，点と直線との距離の公式

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

が得られる．



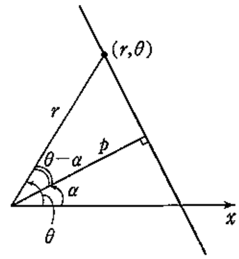
5. おわりに

ベクトルの内積(1)において，θ が変わっても一定なのは何か．それは，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルではないだろうか．

この正射影の考え方は，数学Cで極を通らない直線の極方程式が

$$r\cos(\theta-\alpha)=p \quad (p>0)$$

で表されることを示すときにも用いられる．



正射影の考え方は，ベクトルによる図形の学び直しと，捉えたいと思う．

(明治学園高等学校)

発行所　数研出版株式会社

東京本社	〒102-0073	東京都千代田区九段北1-12-11	TEL 03(3265)0811（代表）
関西本社	〒604-0867	京都市中京区烏丸丸太町西入ル	TEL 075(231)0161（代表）
さいたま支局	〒336-0018	さいたま市南本町1-16-9-4F	
札幌支店	〒060-0052	札幌市中央区南2条東2丁目9-8 大都ビル	TEL 011(261)1723
仙台支店	〒980-0022	仙台市青葉区五橋2-7-9	TEL 022(215)6933
横浜支店	〒222-0033	横浜市港北区新横浜2-14-27 第一生命第2ビル	
名古屋支店	〒461-0004	名古屋市東区葵3-15-31 住友生命千種ビル	TEL 052(937)3423
広島支店	〒730-0813	広島市中区住吉町9-9 中木ビル	TEL 082(243)6453
福岡支店	〒812-0016	福岡市博多区博多駅南1-2-3 住友博多駅前ビル	TEL 092(411)4245

印刷　寿印刷株式会社　010801