対称式を基本対称式で表す方法

筒井(つつい) 忠彦(ただひこ)

《定理》

対称式 $S_n=x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots\cdots+x_p{}^n$ (p は 2 以上の自然数)を基本対称式

$$a_1=x_1+\cdots+x_p,\quad a_2=\sum_{i<j}x_ix_j,\quad a_3=\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k,\quad \cdots\cdots,\quad a_p=x_1\cdots x_p \qquad \text{—— (★)}$$

を用いて表すと次のようになる．

$i_1+2i_2+3i_3+\cdots\cdots+pi_p=n$ を満たすすべての 0 以上の整数の組 $(i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p)$ に対し

$$《i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots\cdots,\ i_p》=n\cdot\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_p-1)!}{i_1!\,i_2!\cdots i_p!}\cdot(-1)^{n-(i_1+i_2+\cdots+i_p)} \qquad \text{—— (★★)}$$

と定義するとき

$$S_n=x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots\cdots+x_p{}^n=\sum_{i_1,\cdots,i_p}《i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p》a_1{}^{i_1}a_2{}^{i_2}a_3{}^{i_3}\cdots a_p{}^{i_p} \qquad \text{—— (★★★)}$$

である．

証明 (★)より，$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_p$ は p 次方程式 $x^p-a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}-\cdots+(-1)^pa_p=0$ …… ①

の解である．よって

$$\begin{aligned}
&S_{n+p}-a_1S_{n+p-1}+a_2S_{n+p-2}-\cdots\cdots+(-1)^pS_n\\
&=x_1{}^{n+p}+x_2{}^{n+p}+\cdots+x_p{}^{n+p}-a_1(x_1{}^{n+p-1}+x_2{}^{n+p-1}+\cdots+x_p{}^{n+p-1})+a_2(x_1{}^{n+p-2}+x_2{}^{n+p-2}+\cdots+x_p{}^{n+p-2})\\
&\qquad-\cdots\cdots+(-1)^p(x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots+x_p{}^n)\\
&=\sum_{i=1}^{p}x_i{}^n\{x_i{}^p-a_1x_i{}^{p-1}+a_2x_i{}^{p-2}-\cdots\cdots+(-1)^pa_p\}=0
\end{aligned}$$
(x_i は①の解より)

$\therefore\quad S_{n+p}-a_1S_{n+p-1}+a_2S_{n+p-2}-\cdots\cdots+(-1)^pS_n=0$ …… ②

いま，$S_n=x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots\cdots+x_p{}^n=\sum_{i_1,\cdots,i_p}A(i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p)a_1{}^{i_1}a_2{}^{i_2}a_3{}^{i_3}\cdots a_p{}^{i_p}$ とおくと，

$i_1+2i_2+\cdots\cdots+pi_p=n+p$ を満たすすべての組 $(i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p)$ に対し，②式の

$a_1{}^{i_1}a_2{}^{i_2}a_3{}^{i_3}\cdots a_p{}^{i_p}$ の係数は，漸化式

$$A(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p)-A(i_1-1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p)+A(i_1,\ i_2-1,\ \cdots,\ i_p)-\cdots+(-1)^pA(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_p-1)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

を満たさなければならない．ここで，(★★)が漸化式③を満たすことを示す．

$$\begin{aligned}
&《i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_p》-《i_1-1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_p》+《i_1,\ i_2-1,\ i_3,\ \cdots,\ i_p》\\
&\qquad\qquad-\cdots\cdots+(-1)^p《i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_p-1》\\
&=(n+p)\cdot\frac{(i_1+i_2+\cdots\cdots+i_p-1)!}{i_1!\,i_2!\cdots\cdots i_p!}\cdot(-1)^{n+p-(i_1+i_2+\cdots+i_p)}\\
&\quad-(n+p-1)\cdot\frac{(i_1-1+i_2+\cdots\cdots+i_p-1)!}{(i_1-1)!\,i_2!\cdots\cdots i_p!}\cdot(-1)^{n+p-1-(i_1-1+i_2+\cdots+i_p)}\\
&\quad+(n+p-2)\cdot\frac{(i_1+i_2-1+\cdots\cdots+i_p-1)!}{i_1!\,(i_2-1)!\cdots\cdots i_p!}\cdot(-1)^{n+p-2-(i_1+i_2-1+\cdots+i_p)}\\
&\quad-\cdots\cdots+(-1)^pn\cdot\frac{(i_1+i_2+\cdots\cdots+i_p-1-1)!}{i_1!\,i_2!\cdots\cdots(i_p-1)!}\cdot(-1)^{n-(i_1+i_2+\cdots+i_p-1)}
\end{aligned}$$

$=(-1)^{n+p-(i_1+\cdots+i_p)}\dfrac{(i_1+i_2+\cdots\cdots+i_p-2)!}{i_1!\,i_2!\cdots\cdots i_p!}\{(n+p)(i_1+i_2+\cdots+i_p-1)-(n+p-1)i_1-(n+p-2)i_2$

$-(n+p-3)i_3-\cdots\cdots-(n+p-p)i_p\}$

$=(-1)^{n+p-(i_1+\cdots+i_p)}\dfrac{(i_1+i_2+\cdots\cdots+i_p-2)!}{i_1!\,i_2!\cdots\cdots i_p!}\{(n+p)(i_1+i_2+\cdots+i_p)-(n+p)(i_1+i_2+\cdots+i_p)$

$-(n+p)+(i_1+2i_2+3i_3+\cdots+pi_p)\}$

$=0$

一方 $S_n=x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots\cdots+x_p{}^n=\sum_{i_1,\cdots,i_p}A(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots\cdots,\ i_p)a_1{}^{i_1}a_2{}^{i_2}a_3{}^{i_3}\cdots a_p{}^{i_p}$ ……… ④

の表し方は一通りである．

∵） $S_n=\sum_{i_1,\cdots,i_p}A'(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots\cdots,\ i_p)a_1{}^{i_1}a_2{}^{i_2}a_3{}^{i_3}\cdots a_p{}^{i_p}$ …… ⑤ を S_n の他の表し方とすると，

④−⑤より　$\sum_{i_1,\cdots,i_p}\{A(i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p)-A'(i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p)\}a_1{}^{i_1}a_2{}^{i_2}a_3{}^{i_3}\cdots a_p{}^{i_p}=0$

恒等式より　$A(i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p)=A'(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots\cdots,\ i_p)$

∴　$A(i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p)=\langle\!\langle i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots,\ i_p\rangle\!\rangle$ ■

例1　$p=2$ のとき　$S_n=x^n+y^n=\sum_{i+2j=n}\langle\!\langle i,\ j\rangle\!\rangle a^ib^j$　$(x=x_1,\ y=x_2,\ a=a_1,\ b=a_2)$

ただし(★★)において，$p=2$ より

$$\langle\!\langle i,\ j\rangle\!\rangle=n\frac{(i+j-1)!}{i!\,j!}(-1)^{n-(i+j)}=(-1)^jn\frac{\{n-(j+1)\}\{n-(j+2)\}\cdots\cdots\{n-(2j-1)\}}{j!}\quad(i+2j=n)$$

例2　$p=3$ のとき

$$S_n=x^n+y^n+z^n=\sum_{i+2j+3k=n}\langle\!\langle i,\ j,\ k\rangle\!\rangle a^ib^jc^k\quad(x=x_1,\ y=x_2,\ z=x_3,\ a=a_1,\ b=a_2,\ c=a_3)$$

ただし(★★)において，$p=3$ より　$\langle\!\langle i,\ j,\ k\rangle\!\rangle=(-1)^jn\dfrac{(i+j+k-1)!}{i!\,j!\,k!}$ …… ③

③を用いて例えば S_5 を求めてみよう．

$i+2j+3k=5$ とおくと　$(i,\ j,\ k)=(5,\ 0,\ 0),\ (3,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1),\ (1,\ 2,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1)$

③より　$\langle\!\langle 5,\ 0,\ 0\rangle\!\rangle=(-1)^05\dfrac{(5+0+0-1)!}{5!0!0!}=1$，$\langle\!\langle 3,\ 1,\ 0\rangle\!\rangle=(-1)^15\dfrac{(3+1+0-1)!}{3!1!0!}=-5$

同様に　$\langle\!\langle 2,\ 0,\ 1\rangle\!\rangle=5$，$\langle\!\langle 1,\ 2,\ 0\rangle\!\rangle=5$，$\langle\!\langle 0,\ 1,\ 1\rangle\!\rangle=-5$

よって　$S_5=x^5+y^5+z^5=a^5-5a^3b+5a^2c+5ab^2-5bc$

例3　一般の $p(\geqq 5)$ のとき，$i_1+2i_2+3i_3+\cdots\cdots+pi_p=5$ とおくと

$(i_1,\ i_2,\ i_3,\ \cdots,\ i_p)=(5,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ (3,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ (1,\ 2,\ 0,\ \cdots,\ 0),$
$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$

同様に(★★)より

$\langle\!\langle 5,\ 0,\ \cdots,\ 0\rangle\!\rangle=(-1)^05\dfrac{(5+0+\cdots+0-1)!}{5!0!\cdots0!}=1$，$\langle\!\langle 3,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\rangle\!\rangle=-5$，$\langle\!\langle 2,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\rangle\!\rangle=5$，

$\langle\!\langle 1,\ 2,\ 0,\ \cdots,\ 0\rangle\!\rangle=5$，$\langle\!\langle 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\rangle\!\rangle=-5$，

$\langle\!\langle 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\rangle\!\rangle=-5$，$\langle\!\langle 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\rangle\!\rangle=5$

よって　$S_5=x_1{}^5+x_2{}^5+\cdots\cdots+x_p{}^5=a_1{}^5-5a_1{}^3a_2+5a_1{}^2a_3+5a_1a_2{}^2-5a_1a_4-5a_2a_3+5a_5$

《注》 一般の整対称式 $f(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_p)$ は　$f(x_1,\ \cdots,\ x_p)=\sum_{k=0}^{n}a_kS_k$ $(S_0=1)$ の形で表されるから上の《定理》より基本対称式で表される．

(徳島文理高等学校)