「$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ について」を読んで

塩見（しおみ） 浩三（こうぞう）

数研通信 35 号に掲載された愛知県立安城東高等学校の早川佳史先生の記事「$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$」を，興味深く読ませていただきました．

同じ問題について，以前に研究したことがあるので，これまで生徒に指導してきたことを中心に書いてみることにします．

この問題が大学入試に出題されたのは今から30数年前の名古屋大学(理系)である．数年前にその資料を焼却したので正確な年度がはっきりしないが昭和41年頃ではないかと思われる．

問題　自然数 m, n について

$I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx$ とするとき

(1)　$I(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$I(m,\ n)=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ となることを示せ．　　(名古屋大学)

〔解答〕

(1)　$I(m,\ n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1}(\beta-x)^n\right]_{\alpha}^{\beta}+\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(\beta-x)^{n-1}dx$$

$$=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$

(2)　$I(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{m+n}I(m+n,\ 0)$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n)!}I(m+n,\ 0)$$

$$I(m+n,\ 0)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

$$\therefore\quad I(m,\ n)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

〔解説〕

(1)の漸化式より $(x-\alpha)^m$ を積分し，$(\beta-x)^n$ を微分する部分積分法を用いることに気がつかなければならない．

(2)は(1)ができなくても等比数列タイプの漸化式と読み取れれば，mは1上がって，nは1下がっている．以下同様にすればよい．

早川先生の記事では，$x-\alpha=u$, $u=at$ と2度の置換によって $I_{m,n}=\int_0^1 t^m(t-1)^n dt$ としてから，部分積分を用いているので，上の解答と比べると少しだけ複雑のように思われます．

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$

$$=(-1)^n\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx$$

とすれば，前の解答より

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=\frac{(-1)^n m!n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$$

の一般解が求まったことになる．

これは早川先生の結論に ${}_{m+n}\mathrm{C}_m=\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$ を代入したもので，公式として記憶しやすく，一般的な形ではないでしょうか？

この証明は理系の数IIIでしか不可能であるが，私は文系の生徒にも，次のように解説している．

＊　**積分計算の公式**(チェック)〈公式が導けるように〉

(1)　• 2 次関数と直線

　• 2 次関数と 2 次関数

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(a を落とさないこと)

(証明)

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x\underset{\sim\sim\sim}{-\alpha+\alpha}-\beta)dx\\
&=a\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}dx\\
&=a\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}-(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta\\
&=a\left\{\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}-\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}\right\}\\
&=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

面積 S は $S=\left|\dfrac{a(\beta-\alpha)^3}{\mathbf{6}}\right|$ と記憶

(2)　• 3 次関数と接線

　• 3 次関数と 2 次関数が接するとき

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}$$
$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}$$

(証明)

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x\underset{\sim\sim\sim}{-\alpha+\alpha}-\beta)dx\\
&=a\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3+(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\}dx\\
&=a\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta\\
&=a\left\{\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}\right\}\\
&=-\frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=a\int_\alpha^\beta (x\underset{\sim\sim\sim}{-\beta+\beta}-\alpha)(x-\beta)^2dx\\
&=a\int_\alpha^\beta \{(x-\beta)^3+(\beta-\alpha)(x-\beta)^2\}dx\\
&=a\left[\frac{(x-\beta)^4}{4}+(\beta-\alpha)\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_\alpha^\beta\\
&=-a\left\{\frac{(\alpha-\beta)^4}{4}-\frac{(\alpha-\beta)^4}{3}\right\}\\
&=\frac{a(\beta-\alpha)^4}{12}
\end{aligned}$$

面積 S は $S=\left|\dfrac{a(\beta-\alpha)^4}{\mathbf{12}}\right|$ と記憶

(3)　• 4 次関数と接線

　• 4 次関数と 2 次関数が 2 点で接するとき

　• 2 次関数と x 軸とで囲まれた部分を x 軸のまわりに回転した回転体の体積

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{a(\beta-\alpha)^5}{30}$$

• (1)と同様に

$(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)$ と変形して

$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=(x-\alpha)^4-2(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3$
$+(\beta-\alpha)^2(x-\alpha)^2$ と変形してから積分する．

面積 S は $S=\left|\dfrac{a(\beta-\alpha)^5}{\mathbf{30}}\right|$ と記憶

＊　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n dx=\left[\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{n+1}$

を利用する．

入試問題は単に問題解決能力を見るだけでなく数学のすばらしさ，良さを理解できるかどうかを見る，大学からの高校生，高校教師へのメッセージでもある．

入試問題の作成には大変なエネルギーが注がれるものと思われる．

高校生も教師も入試問題の出題のねらいや，数学的意義，問題解法の思考のプロセスをじっくりと解読したいものである．

数研通信 33 号の「大学入試の背景を探る ── 共役の話 ──」(宮川幸隆先生)のような研究が今後必要と思う．

(愛媛県済美平成高等学校)