(Irisuna の)連鎖定理の応用について
――メネラウス・チェバを含む定理――

入砂（いりすな）　七五三一（しめいち）

1. はじめに

数研通信 19 号('94)に Irisuna の定理(メネラウスの定理・チェバの定理を含む)がどんな定理かを発表して以来，22 号では線束の定理，27 号では第 3 定理，共線定理，共点定理，32 号では(Irisuna の)連鎖定理をそれぞれ発表してきた．そして，34 号では第 3 定理・共点定理等を応用してニュートンの定理の拡張のいくつかを発表した．さらに，数研通信 39 号ではチェバの定理を正弦比で表して，三角形の五心やブリアンションの定理の別証を試みた．

今回は(Irisuna の)連鎖定理の応用を中心に発表してメネラウスの定理・チェバの定理との違いや関連を考察し，発展教材の研究としたい．

次に定義，Irisuna の定理をあげて準備とします．

2. 定義

以下の考察では，同一直線上の相異なる 3 点 A，B，C に対して，動点 P が A から C を経由し B に到る，という考えがしばしば用いられる．

このとき，

(1) 動点 P に対応する線分の比とは，

$$\sigma(\mathrm{AB})=\sigma(\mathrm{AB},\ \mathrm{C})=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}$$

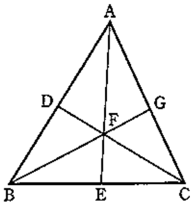
と定め，C を返り点と呼ぶ．ここで，

(ア) 点 C が AB の外分点のとき**返り点 1**

(イ) 点 C が AB の内分点のとき**返り点 0**

と呼ぶことにする．

(2) 図の △ABC を ◬ABC(DEG，F)と表す．



(3) $\sigma(\mathrm{A_0A_1A_2\cdots\ A}_n)$
$=\sigma(\mathrm{A_0A_1})\sigma(\mathrm{A_1A_2})\cdots\cdots\sigma(\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n)$

(4) R_i^j は返り点 1 を i 個含む j 個の比の積のこととする．(返り点 0 は $j-i$ 個)

例. ◬ABC(DEG，F)では，

$\mathrm{R_1}^3$：$\sigma(\mathrm{ABEA})=\sigma(\mathrm{AB})\sigma(\mathrm{BE})\sigma(\mathrm{EA})$

$$=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1$$ (メネラウスの定理)

$\mathrm{R_0}^3$：$\sigma(\mathrm{ABCA})=\sigma(\mathrm{AB})\sigma(\mathrm{BC})\sigma(\mathrm{CA})$

$$=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GA}}=1$$ (チェバの定理)

(5) ◬ABC と ◬A′B′C′ が周または内部の線分 ST(U)(U は返り点 0 または 1)を共有しているとき，◬ABC と ◬A′B′C′ は**連鎖線分** ST(U) で連鎖しているといい，

$$\text{◬ABC}\ \overset{\mathrm{ST(U)}}{\wedge}\ \text{◬A′B′C′}$$

と表し，3 点 S，T，U を**連鎖点**と呼ぶことにする．

3. Irisuna の定理

> ◬ABC(DEG，F)で，点 P は周および内部の線分上を動くものとすると，点 A，B，C，D，E，F，G のどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点 P に対応する線分の比の積は 1 である．
>
> (数研通信 19 号 参照)

次の返り点と共線・共点に関する定理は，証明をするときによく使われ重要である．

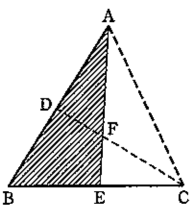
4. $\mathrm{R}_i^3=1$ ($i=0$，1，2，3) と共線・共点に関する定理

> $\mathrm{R}_i^3=1$ ($i=0$，1，2，3) を表す三角形を含む三角形において

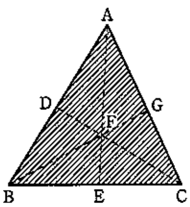
(1) $i=1$, 3 のとき；$R_i^3=1$ ならば，返り点(0 または1)を表す3点(分点)は一直線上にある．(メネラウスの定理の逆)

(2) $i=0$, 2 のとき；$R_i^3=1$ ならば，返り点(0 または1)を表す点(分点)と三角形の頂点を結ぶ3直線は1点で交わる．(チェバの定理の逆)　　(数研通信 27 号 参照)

$R_1^3=1$



$R_0^3=1$

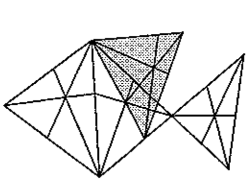


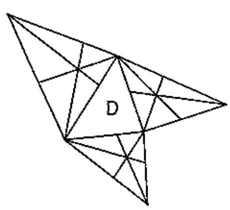
Irisuna の定理を一般化した次の定理によって，従来のメネラウスの定理やチェバの定理とは少し異なるものとなる．

5. 連鎖定理

Irisuna の定理を表す三角形△が一辺(3点共有)または互いに頂点(1点共有)で連鎖する図形において，点Pは△の周および内部の線分上を動くものとすると，動点Pが再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

ただし，内部に△を含まない領域Dがある場合は，このDの外周に対応する線分の比の積は1になるものとする．　(数研通信 32 号 参照)



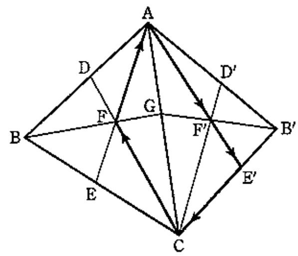


《定義》 3つ以上の三角形が連鎖するとき，すべての連鎖線分に共通な点があるならば，それを**連鎖共有点**ということにする．明らかに，連鎖共有点があるならば内部に△を含まない領域はできない；すなわち，連鎖定理が適用できる．

6. 連鎖定理の応用

(1) 次の問を考えよう．

右図のように△ABCと△ACB′が連鎖しているとき，



(ア) σ(F′E′CFAF′)=1 を証明せよ．

(イ) σ(AD′F′B′CEFDA)=1 を証明せよ．

注) (ア) $\dfrac{F'A}{AE'}\cdot\dfrac{E'B'}{B'C}\cdot\dfrac{CD}{DF}\cdot\dfrac{FE}{EA}\cdot\dfrac{AE'}{E'F'}=1$

(ア), (イ)とも連鎖定理により自明である．従来の解法と比較すると違いがわかると思います．

次に連鎖定理を定理の証明に応用する．

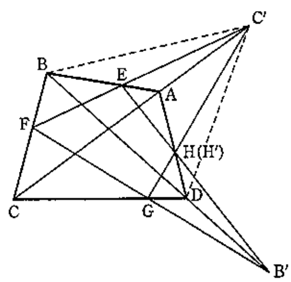
(2) 定理の別証

(ア) 対角線の延長と分点連結線の共点定理

四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA 上の点をそれぞれ E, F, G, H とする．対角線 AC の延長と直線 FE, GH の3直線が1点 C′ で交わるならば，σ(ABCDA)=1

逆も成り立つ．(ただし，FE$\nparallel$GH)

(数研通信 27 号 問題参照)



証明) △BCC′(FA, E)が C′C(A)で△C′CD(AG, H)と連鎖しているから，連鎖定理より

σ(ABCDA)=1

が成り立つ．

逆に，σ(ABCDA)=1 ならば，直線 FE, CA の交点を C′，直線 GC′, AD の交点を H′ とすると，3直線 FE, CA, GH′ が1点 C′ で交わっているから，

σ(ABCD)σ(DA, H′)=1　…… ①

一方，仮定より σ(ABCDA)=1 から，

σ(ABCD)σ(DA, H)=1　…… ②

①，②より　$H=H'$

よって，3直線FE，CA，GHは1点で交わる。

(証明終)

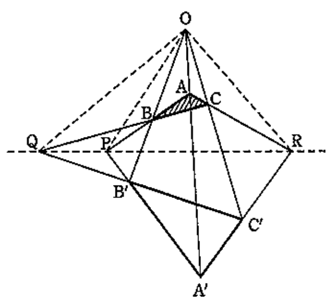
(イ) デザルグの定理

> △ABC，△A'B'C'があり，3直線AA'，BB'，CC'が1点Oにおいて交わるならば，対辺AB，A'B'；BC，B'C'；AC，A'C'のそれぞれの交点P，Q，Rは一直線上にある。

証明1） 3点P，Q，Rを返り点として $R_3{}^3=1$ つまり

$\sigma(AB,\ P)\sigma(BC,\ Q)\sigma(CA,\ R)=1$ …… ①

を証明する。(4. 参照)



OB'(B)

△OA'P(AB', B)　∧　△OC'Q(CB', B)

OC'(C)　　　　OA'(A)

∧　△OA'R(AC', C)　∧　△OA'P

(Oが連鎖共有点)

よって，連鎖定理より①が成り立つ。

つまり $R_3{}^3=1$ が成り立つから，返り点を表す3点P，Q，Rは一直線上にある。(メネラウスの定理の逆)

(証明終)

証明2） 3直線が1点Oで交わっているから，四角形での対角線の延長と分点連結線の共点定理(6. (2)(ア))より

$\sigma(APA'RA)=1$

よって，この定理の逆より，対角線RPの延長と直線CB，C'B'の3直線は1点で交わる。

つまり3点P，Q，Rは一直線上にある。

(証明終)

(ウ) パップス－パスカルの定理

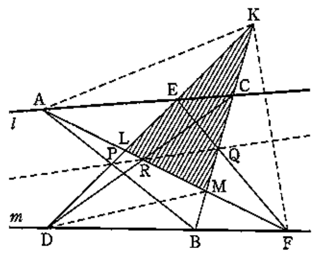
> 相異なる2直線ℓ，mがあって，ℓ上に3点A，E，Cが，m上に3点D，B，Fがあれば，ABとDEの交点P，BCとEFの交点Q，CDとFAの交点Rは一直線上にある。

証明1） 下の図のように直線DE，BC；DE，AF；AF，BCのそれぞれの交点をK，L，Mとする。返り点P，Q，Rとして $R_1{}^3=1$ つまり

$\sigma(LK,\ P)\sigma(KM,\ Q)\sigma(ML,\ R)=1$ …… ①

を証明する。

連鎖する2つの三角形に連鎖定理を用いる。(略)



証明2） 連鎖点(連鎖共有点)を順次通って，もとの点に戻れば比の積は1になることを用いる。

AM(L)　　　　KL(E)

△ABK(PM, L)　∧　△AMK(LC, E)　∧

LF(M)　　　　KD(L)

△KLF(EM, Q)　∧　△KDF(LB, M)　∧

△DKM(LC, R)　(Lが連鎖共有点)

よって，連鎖定理より

AM(L)　　KL(E)

∧　　∧

$\sigma(LK,\ P)\sigma(KM,\ B)\{\sigma(MK,\ C)\}$

LF(M)　　KD(L)

∧　　∧

$\{\sigma(KM,\ Q)\}\{\sigma(MK,\ B)\}\{\sigma(KM,\ C)$

$\times\sigma(ML,\ R)\}=1$

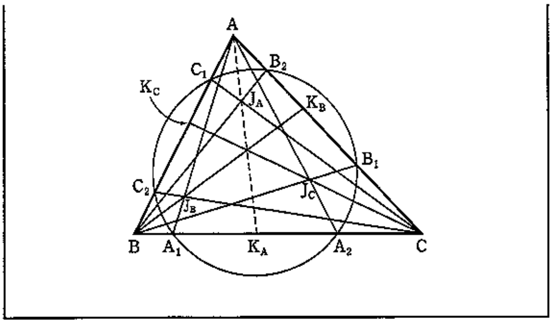
よって，①が成り立つ。つまり $R_1{}^3=1$ が成り立つから返り点を表す3点P，Q，Rは一直線上にある。

(証明終)

(エ) パスカルの定理

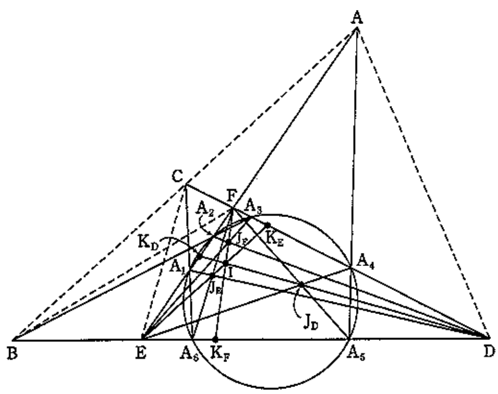
《補題》(円と交わる三角形での共点定理)

> △ABCが円に6点A_1，A_2；B_1，B_2；C_1，C_2で図のように交わっているとき，B_2B，C_1C；C_2C，A_1A；A_2A，B_1Bのそれぞれの交点をJ_A，J_B，J_Cとすると，3直線AJ_A，BJ_B，CJ_Cは1点で交わる。　(証明略)



補題を用いて次のパスカルの定理を証明する．

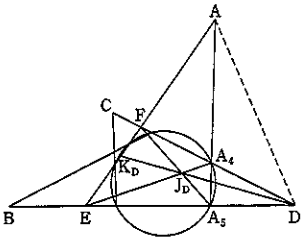
> 円に内接する六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ の相対する辺 A_1A_2 と A_4A_5，A_2A_3 と A_5A_6，A_3A_4 と A_1A_6 の(延長)交点 A，B，C は一直線上にある．



証明) 直線 A_1A_2，A_3A_4；A_1A_2，A_5A_6；A_3A_4，A_5A_6 のそれぞれの交点を F，E，D とする．

$R_3{}^3$：$\sigma(FE,\ A)\sigma(ED,\ B)\sigma(DF,\ C)=1$ …… (A)

を証明する．



FA_6，DA_1；EA_3，DA_2；EA_4，FA_5 のそれぞれの交点を J_E，J_F，J_D とする．円と交わる △FED に補題を用いると，3直線 EJ_E，FJ_F，DJ_D は1点で交わる．この交点を I とする．

また，直線 EJ_E，FD；FJ_F，ED；DJ_D，FE のそれぞれの交点を K_E，K_F，K_D とする．

連鎖共有点を通ってもとの点に戻れば比の積は1になることを用いる．

$$\begin{array}{ccccc} FD(A_4),\ ED(A_5) & & FE(K_D) & & \\ \triangle AED(A_4) & \wedge & \triangle FED(J_D) & \wedge & \triangle FED(I) \end{array}$$

(F，E は連鎖共有点) …… ①

$$\begin{array}{ccccc} FD(A_3),\ FE(A_2) & & ED(K_F) & & \\ \triangle BDF(A_2) & \wedge & \triangle EDF(J_F) & \wedge & \triangle FED(I) \end{array}$$

(E，D は連鎖共有点) …… ②

$$\begin{array}{ccccc} FE(A_1),\ ED(A_6) & & DF(K_E) & & \\ \triangle EDC(A_1) & \wedge & \triangle DFE(J_E) & \wedge & \triangle FED(I) \end{array}$$

(D，F は連鎖共有点) …… ③

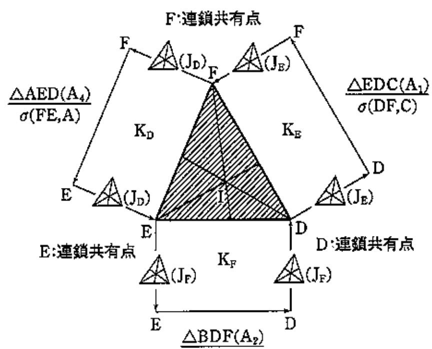
$\sigma(FE,\ A)$ の点Eは，①，②から $\triangle AED(A_4)$ と $\triangle BDF(A_2)$ の連鎖共有点である．

同様に $\sigma(ED,\ B)$ の点Dは②，③から $\triangle BDF(A_2)$ と $\triangle EDC(A_1)$；$\sigma(DF,\ C)$ の点Fは③，①から $\triangle EDC(A_1)$ と $\triangle AED(A_4)$ のそれぞれ連鎖共有点となっている．

よって，連鎖定理より(A)が成り立つ．

つまり $R_3{}^3=1$ が成り立つから，返り点 A，B，C は一直線上にある． (証明終)

《連鎖シェーマ》

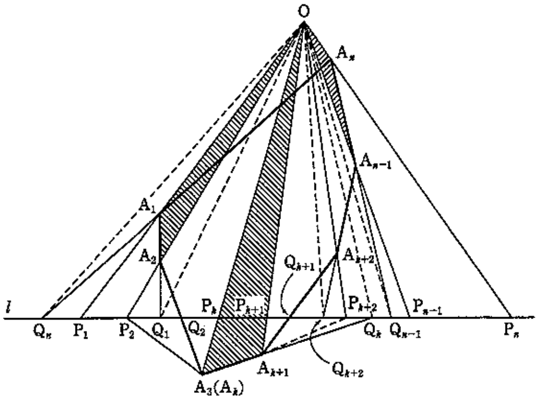


7. メネラウスの定理・チェバの定理と連鎖定理の関係について

(1) *n* 角形でのメネラウスの定理と連鎖定理の関係

> n 角形 $A_1A_2A_3$ ……$A_{n-1}A_n$ の辺または延長と直線 ℓ との交点を図のように順に Q_1，Q_2，Q_3，……，Q_{n-1}，Q_n とすると，
>
> $$\frac{A_1Q_1}{Q_1A_2}\cdot\frac{A_2Q_2}{Q_2A_3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{A_{n-1}Q_{n-1}}{Q_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nQ_n}{Q_nA_1}=1$$

注) 与式は $\sigma(A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}A_nA_1)=1$ とも表される。



証明) n 角形のどの辺の延長上にもない点Oと各頂点 A_1, A_2, $\cdots\cdots$, A_k, $\cdots\cdots$, A_{n-1}, A_n を結ぶ直線が直線 ℓ と交わる点をそれぞれ P_1, P_2, $\cdots\cdots$, P_k, $\cdots\cdots$, P_{n-1}, P_n とする。

そうすると、

$$OA_2(P_2)$$

$$\triangle OA_1A_2(P_1Q_1P_2) \ \wedge \ \triangle OA_2A_3(P_2Q_2P_3)$$

$$\wedge \ \cdots\cdots \ \wedge \ \triangle OA_kA_{k+1}(P_kQ_kP_{k+1})$$

$$OA_{k+1}(P_{k+1})$$

$$\wedge \ \triangle OA_{k+1}A_{k+2}(P_{k+1}Q_{k+1}P_{k+2}) \ \wedge \ \cdots\cdots$$

$$OA_n(P_n) \qquad OA_1(P_1)$$

$$\wedge \ \triangle OA_nA_1(P_nQ_nP_1) \ \wedge \ \triangle OA_1A_2$$

(Oは連鎖共有点)

よって，連鎖定理より

$$\sigma(A_1A_2)\sigma(A_2A_3)\cdots\cdots\sigma(A_kA_{k+1})$$

$$\times\sigma(A_{k+1}A_{k+2})\cdots\cdots\sigma(A_nA_1)=1$$

つまり　$\sigma(A_1A_2\cdots\cdots A_nA_1)=1$

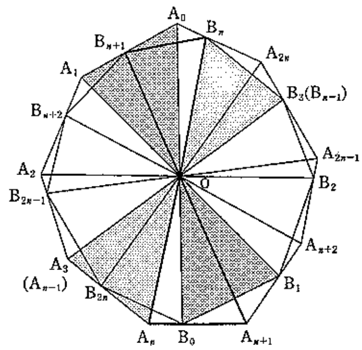
よって，成り立つ。　(証明終)

したがって，n 角形でのメネラウスの定理はこの連鎖定理の場合だから，メネラウスの定理は連鎖定理に含まれるともいえるだろう。

(2) $(2n+1)$角形でのチェバの定理と連鎖定理の関係

> $(2n+1)$角形 $A_0A_1A_2\cdots\cdots A_{2n}$ の内部の点Oと頂点と結ぶ直線が対辺と交わる点を順にそれぞれ B_0, B_1, B_2, $\cdots\cdots$, B_n, $\cdots\cdots$, B_{2n} とすると，
> $$\sigma(A_0A_1A_2\cdots\cdots A_{2n}A_0)=1$$

(証明略)　四辺形でのメネラウスの定理を表す三角形の連鎖と線束による分割比の定理(数研通信34号 資料3)により証明される。



$(2n+1)$角形でのチェバの定理は，四辺形でのメネラウスの定理の連鎖の場合だから連鎖定理に含まれるとも考えられるだろう。

8. 今後の課題

今後の重要な課題は，今回にひき続き Irisuna の定理を一般化した連鎖定理を問題の解法にどんどん応用することだと考えます。また，連鎖定理の多面体や曲面への発展を発表して，関係する先生方に意見を求めることであります。さらに，これまでの研究の結果を教育の現場にどのように具現化するかは，これからの課題であります。

(愛知県立一宮興道高等学校)

〈参考文献・資料〉

1) 岩田至康 編：幾何学大辞典，槇書店
2) 清宮俊雄 著：幾何学 ―発見的研究法―，科学新興社
3) 入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，数研通信 19 号，数研出版('94)
4) ：Irisuna の定理，数研通信 22 号，数研出版('95)
5) ：Irisuna の定理と共線定理，共点定理について (Menelaos の定理・Ceva の定理を含む)，数研通信 27 号，数研出版('96)
6) ：Irisuna の定理と連鎖定理(Menelaos の定理・Ceva の定理を含む)，数研通信 32 号，数研出版('98)
7) ：Newton の定理の拡張について―Irisuna の定理―，数研通信 34 号，数研出版('99)
8) ：正弦比によるチェバの定理とその応用について，数研通信 39 号，数研出版(2001)
9) ：Irisuna の定理(メネラウスの定理・チェバの定理を含む)，(石田教育賞)，I F. Report 第 22 号，財団法人石田財団('95)

10)・Irisuna の定理と線束の第 3 定理(Menelaos の定理・Ceva の定理を含む)，イプシロン，愛知教育大学数学教育学会誌第 37 巻('95)
11)・メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisuna の定理—，日数教学会誌第 76 巻，77 巻，78 巻，79 巻，80 巻臨時増刊，日数教三重，東京，長崎，群馬，山口，秋田大会提案資料('94,'95,'96,'97,'98,'99)
12)・メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisuna の定理—，研究集録愛数 33 号，34 号，35 号，36 号，37 号，38 号(愛知県高等学校数学研究会)('95,'96,'97,'98,'99，2000)
13)・"メネラウス・チェバの定理の拡張について"，平成 5 年度県立学校教職員個人研究研究集録(愛知県教育委員会)('94)
14)・メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について—Irisuna の定理の発展—，平成 6 年度愛知県高等学校数学研究会尾張地区研究発表大会提案資料('95)