n 回微分可能な関数について

渡辺(わたなべ)　了梧(りょうご)

定理　n 回微分可能な関数 $f(x)$ について $f^{(1)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ と定義する。

このとき　$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}f\{x+(n-r)h\}}{h^n}$

証明)　$n=1$ のとき　$f^{(1)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{1}(-1)^r\binom{1}{r}f\{x+(1-r)h\}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

ゆえに，$n=1$ のとき成り立つ。

次に $n=k$ のとき成り立つと仮定すると　$f^{(k)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}f\{x+(k-r)h\}}{h^k}$

$n=k+1$ のとき，

$$f^{(k+1)}(x)=\lim_{h'\to 0}\frac{f^{(k)}(x+h')-f^{(k)}(x)}{h'}$$

$$=\lim_{h'\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}f\{x+h'+(k-r)h\}-\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}f\{x+(k-r)h\}}{h'h^k}$$

$$=\lim_{h'\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}[f\{x+h'+(k-r)h\}-f\{x+(k-r)h\}]}{h'h^k}$$

ここで，$h'=h$ とおくと

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}[f\{x+h+(k-r)h\}-f\{x+(k-r)h\}]}{h^{k+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}[f\{x+(k+1-r)h\}-f\{x+(k-r)h\}]}{h^{k+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^0\binom{k}{0}f\{x+(k+1)h\}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\left(\binom{k}{r-1}+\binom{k}{r}\right)f\{x+(k+1-r)h\}-(-1)^k\binom{k}{k}f(x)}{h^{k+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-1)^0\binom{k+1}{0}f\{x+(k+1)h\}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\binom{k+1}{r}f\{x+(k+1-r)h\}+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{k+1}f(x)}{h^{k+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{k+1}{r}f\{x+(k+1-r)h\}}{h^{k+1}}$$

これは，$n=k+1$ のときも成り立つことを示している．

さて，この定理から導かれることがらについて示す．

m，n を正の整数とし，$f(x)=x^m$ とする．

$n>m$ のとき，

$$f^{(n)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\{(n-r)h\}^m}{h^n}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^m}{h^{n-m}}=0$$

$$\therefore\quad \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^m=0 \quad (n>m)$$

$n=m$ のとき，

$$f^{(n)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\{(n-r)h\}^n}{h^n}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^n h^n}{h^n}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^n=n! \quad (\because\quad f^{(n)}(0)=n!)$$

$$\therefore\quad \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^n=n! \quad (n=m)$$

$n<m$ のとき，

$$f^{(n)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\{(n-r)h\}^m}{h^n}=\lim_{h\to 0}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}(n-r)^m h^{m-n}=0$$

$$\therefore\quad f^{(n)}(0)=0 \quad (n<m)$$

（青森県立八戸中央高等学校）