行列の標準化について

いしはま　ふみたけ
石濱　文武

§1. はじめに

2次正方行列の標準化(Jordan 標準形)について簡潔に記述します．特に，重解の場合について工夫がしてあります．具体的な問題について本稿の方法を適用してみると，この方法が明解で平易な方法であることを理解されると思います．

ご参考までに，筆者の勤務校の授業で，固有値の説明の後，本稿を骨子とした教材をつくり使用したところ，かなりの数の生徒が内容を理解できたことを付記します．

§2. 2次正方行列 A が異なる2つの固有値 α, β をもつ場合

$\vec{p}(\neq\vec{0})$ を α に対する A の固有ベクトル，$\vec{q}(\neq\vec{0})$ を β に対する A の固有ベクトルとします．

このとき，

$$A\vec{p}=\alpha\vec{p},\ A\vec{q}=\beta\vec{q} \tag{1.1}$$

が成立します．また，

$$\vec{p},\ \vec{q}\text{ は一次独立} \tag{1.2}$$

です．

更に，変換行列 P を

$$P=(\vec{p}\quad\vec{q})$$

とおくと，(1.2)より P は正則で，P^{-1} が存在します．

また，$P^{-1}P=E$（単位行列）より，

$$P^{-1}(\vec{p}\quad\vec{q})=E$$

$$(P^{-1}\vec{p}\quad P^{-1}\vec{q})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ P^{-1}\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

(1.1)，(1.3)より，

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=P^{-1}A(\vec{p}\quad\vec{q})\\&=P^{-1}(A\vec{p}\quad A\vec{q})\\&=P^{-1}(\alpha\vec{p}\quad\beta\vec{q})\\&=(\alpha P^{-1}\vec{p}\quad\beta P^{-1}\vec{q})\\&=\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となって，Aが対角化されました．

§3. A がスカラー行列の場合

$$A=\alpha E=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

この場合，Aそのものが対角行列です．

§4. A が重解の固有値 α をもち，スカラー行列ではない場合

Aがスカラー行列でないことから，

$$A-\alpha E\neq O \tag{3.1}$$

Hamilton-Cayley の定理より

$$(A-\alpha E)^2=O \tag{3.2}$$

(3.1)より

$$(A-\alpha E)\vec{q}\neq\vec{0} \tag{3.3}$$

を満たす2次列ベクトル $\vec{q}$ が存在します．

この $\vec{q}$ に対して，

$$\vec{p}=(A-\alpha E)\vec{q} \tag{3.4}$$

とおきます．このとき，

$$A\vec{q}=\vec{p}+\alpha\vec{q} \tag{3.5}$$

となります．更に，(3.4)，(3.2)より，

$$(A-\alpha E)\vec{p}=(A-\alpha E)^2\vec{q}=\vec{0}$$

が成立しますから，$\vec{p}$ は固有ベクトルで

$$A\vec{p}=\alpha\vec{p} \tag{3.6}$$

で，(3.4)から，$\vec{p}$, $\vec{q}$ は一次独立なので，変換行列Pを

$$P=(\vec{p}\quad\vec{q})$$

とおくと，Pは正則になります．

(3.5)，(3.6)より

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=P^{-1}A(\vec{p}\quad\vec{q})\\&=P^{-1}(A\vec{p}\quad A\vec{q})\\&=P^{-1}(\alpha\vec{p}\quad\vec{p}+\alpha\vec{q})\end{aligned}$$

$$=(\alpha P^{-1}\vec{p} \quad P^{-1}\vec{p}+\alpha P^{-1}\vec{q})$$

$$=\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\0 & \alpha\end{pmatrix}$$

となり，Aが標準化されました．

§5．例

文字，記号は§1～4のものをそのまま使います．

(1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$ のとき，

$$\alpha=1,\ \beta=5,\ \vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{q}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$$

となります．

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$ のとき，$\alpha=2$（重解）で，

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$(A-2E)\vec{q}\neq\vec{0}$ を満たす $\vec{q}$ として，$\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ をとれば，

$$\vec{p}=(A-\alpha E)\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

と標準化されます．

（公文国際学園非常勤講師）