フィボナッチ数を教室に (I)

宮地(みやじ)　俊彦(としひこ)

0. 序章

数学セミナー誌上において「もともとが算術の問題だからかどうか非常に面白いテーマでありながら，この国の学校ではフィボナッチ数についてあまり教えてくれない．教えてくれないからあまり知られていないこともある．」[1] と山本幸一氏が「フィボナッチ数物語」で述べられてから早四半世紀の時が流れた．

しかし最近では，以前よりこの数に関する問題が入試で取り上げられることが増えたようであるが，それらは個別的，断片的であり，この数を教材化して教えるということがなされていない状況は，四半世紀前とそれ程変わっていないように思える．

本稿は筆者がこの20年の間，意識的に授業の中，あるいは数学クラブの中で取り扱ってきたもの，更には参考書等あまり恵まれない中で，自分流に考え，既知の公式を発見する旅，そしてそれを九州数学教育会会誌「情報」あるいは早川学而先生の個人研究誌「初等数学」に発表してきたものの一部である．

本稿を書き上げる途中で，以前とは異なる方法で等式が導かれることに気付き，証明方法を発表当時とは変更したものも多くある．

これらの発表は2度にわたり，福岡県教育委員会より個人研究奨励金を受給されるという幸運にも恵まれた．

筆者自身自己流の「公式再発見」の旅を続けてゆく中でフィボナッチ数のもつ不思議さ，その関係式の美しさに感動させられることが多く，この感動を生徒に伝えたいと，授業の中で折りに触れ取り上げてきた．そして生徒からの反応に色々と触発されたことも多く，その点においてこの発表は授業に積極的に参加してくれた生徒達との共同作業の結果とも言えるものである．

1. フィボナッチ数およびリュカ数の定義

フィボナッチ数はよく知られたように，次の初期値と漸化式とにより与えられる．

$$u_0=0,\ u_1=1\ ;\ u_{n+2}=u_n+u_{n+1} \tag{1}$$

ここで u_0 に違和感と戸惑いを覚える生徒も多いが，これは次の理由による．

通常(1)においては $n\geqq 0$ の条件が付くことが多いが

$$u_n=u_{n+2}-u_{n+1}$$

により，n に負数を次々と代入していくと，

$$u_{-1}=u_1-u_0=1,\quad u_{-2}=u_0-u_{-1}=-1,$$
$$u_{-3}=u_{-1}-u_{-2}=2,\quad u_{-4}=u_{-2}-u_{-3}=-3$$

というように u_0 を中心として符号を無視すると対称性が得られるのである．

n	⋯	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	⋯
u_n	⋯	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	⋯

従って，(1)において u_0 を定義する意味があり，また $n\geqq 0$ の条件も付けない．

次にフィボナッチ数を考えるときに，常にフィボナッチ数の影になり，ひなたになって一緒に現れる[1]リュカ数は

$$v_0=2,\ v_1=1\ ;\ v_{n+2}=v_n+v_{n+1} \tag{2}$$

によって定義される．Lucas（リュカ）は19世紀フィボナッチ数を深く研究したという．

ここにおいても，前と同じ理由で，$n\geqq 0$ の条件は付けないでおく．

リュカ数 v_n はフィボナッチ数 u_n を用いて

$$v_n=u_{n-1}+u_{n+1} \tag{3}$$

で表すことができる．実際

$$u_{-1}+u_1=1+1=v_0$$
$$u_0+u_2=0+1=v_1$$

$u_{n-1}+u_{n+1}$ が漸化式 $x_n+x_{n+1}=x_{n+2}$ を満たすことは明らかなので，(3)の成立することが確かめられる．

2. フィボナッチ，リュカ数の一般項の求め方

2.1 特性方程式の利用

この方法は周知の方法で教室において必ず行われる方法でもある．

$$x^2-x-1=0 \tag{4}$$

の解を α，$\beta\,(\alpha>\beta)$ とすると，

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

である．今後 α と β が現われるときは，(5)の値である．

この α と β を用いると，(1)は2通りの表し方

$$u_{n+2}-\alpha u_{n+1}=\beta(u_{n+1}-\alpha u_n)$$
$$u_{n+2}-\beta u_{n+1}=\alpha(u_{n+1}-\beta u_n)$$

ができる．2つの数列はそれぞれ公比が β，α で初項が共に $u_1-\alpha u_0=u_1-\beta u_0=1$ の等比数列であるので，

$$u_{n+1}=\alpha u_n+\beta^n \tag{6}$$
$$u_{n+1}=\beta u_n+\alpha^n \tag{7}$$

となり，(6)−(7)を考え，$\alpha-\beta=\sqrt{5}$ に注意すると，

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$$

具体的には

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \tag{8}$$

となる．リュカ数については初項がそれぞれ，

$$v_1-\alpha v_0=1-2\alpha=-\sqrt{5}=-(\alpha-\beta)$$
$$v_1-\beta v_0=1-2\beta=\sqrt{5}=\alpha-\beta$$

であるので，

$$v_{n+1}=\alpha v_n-(\alpha-\beta)\beta^n$$
$$v_{n+1}=\beta v_n+(\alpha-\beta)\alpha^n$$

となり2式を引くことにより

$$v_n=\alpha^n+\beta^n$$

となる．具体的には

$$v_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{9}$$

となる．(8)，(9)はビネの公式といわれている．

2.2 割り算を利用する

次のような問題を考えてみよう．[2)]

> x^7 を x^2-x-1 で割ったときの商および余りをフィボナッチ数を用いて表せ．

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & & \\ \hline
1-1-1\,) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & 1 & -1 & -1 & & & & & \\ \hline
 & & 1 & 1 & 0 & & & & \\
 & & 1 & -1 & -1 & & & & \\ \hline
 & & & 2 & 1 & 0 & & & \\
 & & & 2 & -2 & -2 & & & \\ \hline
 & & & & 3 & 2 & 0 & & \\
 & & & & 3 & -3 & -3 & & \\ \hline
 & & & & & 5 & 3 & 0 & \\
 & & & & & 5 & -5 & -5 & \\ \hline
 & & & & & & 8 & 5 & 0\\
 & & & & & & 8 & -8 & -8\\ \hline
 & & & & & & & 13 & 8
\end{array}$$

つまり

$$x^7=(x^2-x-1)(u_1x^5+u_2x^4+u_3x^3+u_4x^2+u_5x+u_6)+u_7x+u_6$$

この式を一般化して考えるのは簡単であり，それは次のようになる．

$$x^n=(x^2-x-1)(u_1x^{n-2}+u_2x^{n-3}+\cdots\cdots+u_{n-2}x+u_{n-1})+u_nx+u_{n-1} \tag{10}$$

この等式は数学的帰納法を利用するまでもなく簡単に(1)を用いて，以下のように証明できる．

(10)の右辺を順次展開して整理すると，

x^n の係数は　$u_1=1$

x^{n-1} の係数は　$u_2-u_1=0$

x^{n-2} の係数は　$u_3-u_2-u_1=0$

……

x の係数は　$u_n-u_{n-1}-u_{n-2}=0$

x^0 の係数は　$u_{n-1}-u_{n-1}=0$

となり確かに左辺の x^n に一致することになる．

さて(10)に α と β を代入すると，$\alpha^2-\alpha-1=0$ なので，

$$\alpha^n=u_n\alpha+u_{n-1} \tag{11}$$
$$\beta^n=u_n\beta+u_{n-1} \tag{12}$$

となる．この2式を引くと，u_n が，2式を加えると v_n が得られる．

2.3 行列の利用 (1)

この方法は数学Cの行列あるいは行列式の演習としても利用できる．

$$\begin{cases} u_n\ \ =0u_{n-1}+1\cdot u_n \\ u_{n+1}=1\cdot u_{n-1}+1\cdot u_n \end{cases}\quad \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n\end{pmatrix}$$

となる．$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}=H^{n-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}=H^{n-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}=H^{n-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=H^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$\begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}=H^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=H^n$$

となる．つまり，次の等式が成り立つ．

$$H^n=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

ここで H^n を具体的に計算することにより，u_n の具体的表現が得られる．

いま，行列Pを $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ とすると，

$P^{-1}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$ となるので

$$P^{-1}HP=\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$H^n=P\begin{pmatrix} \beta^n & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} \alpha^{n-1}-\beta^{n-1} & \alpha^n-\beta^n \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} \end{pmatrix}$$

(計算の途中で $\alpha\beta=-1$ であることを利用した.)

ここで1行2列成分をみて u_n が求まることになる．また，(13)の中辺，右辺の行列式を考えると，

$$u_{n-1}u_{n+1}-u_n^2=(-1)^n \qquad (14)$$

を得るが，これはシムソンの等式と呼ばれ，フィボナッチ数列を特徴づける重要な等式の1つである．

更に(6)を利用してフィボナッチ数と行列とを関連付けてみよう．

2.4 行列の利用 (2)

$$u_{n+1}=\alpha u_n+1\cdot\beta^n$$

$$\beta^{n+1}=0u_n+\beta\cdot\beta^n$$

の2式より，

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \beta^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ \beta^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ \beta^n & \beta^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} u_0 & u_1 \\ \beta^0 & \beta \end{pmatrix}$$

であるが，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるので

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ \beta^n & \beta^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，$-\beta u_n+u_{n+1}=\alpha^n$ を考えると次の結果が従う．

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & u_n \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \qquad (14)$$

この等式より u_n の具体的な形を求めることができる．(14)の左辺の行列は入試の問題としてもよく出会うもので $n=2,\ 3$ と順次計算して n のときを予想して，それを帰納法で証明すればよい．

左辺の1行2列の成分は，

$$\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots\cdots+\beta^{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

であるので，再びビネの公式(8)が得られたことになる．あるいは，$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \alpha-\beta \end{pmatrix}$ として

$$P^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

として u_n を求めることもできる．

また，(13)の結果より，

$$\mathrm{tr}H^n=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n=v_n \qquad (15)$$

であることもわかるのである．

このことは，多少一般化されたフィボナッチ数を考えるときに，一般化されたリュカ数を定義するときに役立つであろう．

2.5 フィボナッチ数の多少の一般化[3)]

フィボナッチの数列を多少一般化した次の数列を考える．$p\neq0$ として，

$$a_0=0,\ a_1=1\ ;\ a_{n+2}=pa_n+qa_{n+1} \qquad (16)$$

この数列 $\{a_n\}$ について行列と関連付けると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} pa_{n-1} & a_n \\ pa_n & a_{n+1} \end{pmatrix} \qquad (17)$$

であることは前と同様にして示すことができる．一般化されたリュカ数は(17)右辺のトレースを考えると，

$$d_n=pa_{n-1}+a_{n+1} \qquad (18)$$

で定義すればよいことになる．

さて，a_n を順次(16)を用いて計算すると，

$a_2=q$

$a_3=p+q^2$

$a_4=2pq+q^3$

$a_5=p^2+3pq^2+q^4$

$a_6=3p^2q+4pq^3+q^5$

$a_7=p^3+6p^2q^2+5pq^4+q^6$

$a_8=4p^3q+10p^2q^3+6pq^5+q^7$

$a_9=p^4+10p^3q^2+15p^2q^4+7pq^6+q^8$
$a_{10}=5p^4q+20p^3q^3+21p^2q^5+8pq^7+q^9$

これらの計算より，次のことが予想される．

$$a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-k}{k}p^kq^{n-1-2k} \tag{19}$$

フィボナッチの数については $p=q=1$ として，

$$u_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-k}{k} \tag{20}$$

証明は n が偶数のときと奇数のときに分けて２項係数の関係式 $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ を利用して，(19)が漸化式(16)を満たすことを示せばよいが，ここでは省略する．生徒にとっては大変難しいようであった．

2.6 階段昇りの方法の数を数えて[4)]

次の問題は教科書でも取り上げられることが多い．

> ８段ある階段を１段あるいは２段昇りを併用するとき何通りの昇る方法があるか．

１段昇りの回数を x，２段昇りの回数を y とすると，次の方程式が得られる．

$$x+2y=8 \quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$$

この方程式の整数解は，

$(x,\ y)=(8,\ 0),\ (6,\ 1),\ (4,\ 2),\ (2,\ 3),\ (0,\ 4)$

であり，それぞれの場合の数を考えて，

$${}_8C_0+{}_7C_1+{}_6C_2+{}_5C_3+{}_4C_4(=34)$$

となる．一方 n 段ある階段を昇る方法の数を b_n とすると，$n+2$ 段目になる直前には n 段目か $n+1$ 段目にいるかのいずれかであるので

$$b_{n+2}=b_n+b_{n+1}\ ;\ b_1=1,\ \ b_2=2$$

したがって

$$b_n=u_{n+1} \tag{21}$$

である．この問題の場合は $b_8=u_9$ であるので，次の等式

$$u_9={}_8C_0+{}_7C_1+{}_6C_2+{}_5C_3+{}_4C_4$$

が導かれたことになる．一般の n の場合については，

$$x+2y=n \quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$$

の整数解は

i）n が偶数のとき

$(x,\ y)=(n,\ 0),\ (n-2,\ 1),\ \cdots\cdots,\ \left(2,\ \frac{n-2}{2}\right),\ \left(0,\ \frac{n}{2}\right)$

ii）n が奇数のとき

$(x,\ y)=(n,\ 0),\ \cdots\cdots,\ \left(3,\ \frac{n-3}{2}\right),\ \left(1,\ \frac{n-1}{2}\right)$

であるので，

$$b_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{n-k}C_k \tag{22}$$

となる．これは，(21)によれば u_{n+1} であったので再び(20)が得られたことになる．

この方法でフィボナッチ数を求めることに気付くまでは，この問題を単に漸化式を出しそれから答を計算して出すだけであったが，方程式の整数解を求め，それから各々の場合の数を計算することにより(22)が導かれることを知ったときの驚きは大きかった．どんな場合であろうと別解を考えることの大切さを知った思い出深い方法である．

2.7 パスカルの三角形の上昇対角線の和[5)]

等式(20)はフィボナッチ数とパスカルの三角形との関連を予想させるものであるが，逆にパスカルの三角形の構成方法により，２項係数の和を用いてフィボナッチ数を表現することができる．(それは等式(20)の再発見ということでもあるのだが)．

パスカルの上昇対角線上の数の和がフィボナッチ数になっていることは古来よく知られている．実際にそれを確かめ，何故そうなのかということを考えてみよう．

	1	1							
	1	2	1						
	1	3	3	1					
	1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	$\boxed{6}$	1		
	1	7	21	35	$\boxed{35}$	21	7	1	
	1	8	28	$\boxed{56}$	70	56	28	8	1
u_{10}	1	9	$\boxed{36}$	84	126	126	84	……	
u_{11}	1	$\boxed{10}$	45	120	210	252	……		
u_{12}	$\boxed{1}$	11	55	165	330	462	……		

この図からわかるように

$$\bigcirc+\triangle=\square$$

となっているがこれは2項係数を特徴付ける等式

$${}_{n-1}C_{k-1}+{}_{n-1}C_k={}_nC_k$$

を表している．そして

○を加えたものが u_{10}

△を加えたものが u_{11}

□を加えたものが u_{12}

つまり

$$u_{10}+u_{11}=u_{12}$$

を図は表しているのである．更に，パスカルの三角形を用いて，種々の等式を導くことができる．

2.8 行列の利用 (3)

さて，u_{n+1} と v_{n+1} について

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}=u_n+(v_n-u_{n+1})$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=2u_n+u_{n+1}\\ &=2u_n+(u_n+u_{n-1}+u_{n+1})/2\\ &=2u_n+(u_n+v_n)/2 \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{cases} u_{n+1}=(u_n+v_n)/2\\ v_{n+1}=(5u_n+v_n)/2 \end{cases}$$

が成り立つ．そこで $Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\5&1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}u_n&u_{n+1}\\v_n&v_{n+1}\end{pmatrix}=Q^n\begin{pmatrix}u_0&u_1\\v_0&v_1\end{pmatrix}=Q^n\begin{pmatrix}0&1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$Q^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_n&u_{n+1}\\v_n&v_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

となるが

$$-u_n+2u_{n+1}=u_{n-1}+u_{n+1}=v_n$$

$$-v_n+2v_{n+1}=v_{n-1}+v_{n+1}=5u_n$$

であるので，次が得られたことになる．

$$Q^n=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\5&1\end{pmatrix}\right\}^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}v_n&u_n\\5u_n&v_n\end{pmatrix} \tag{23}$$

行列の中の5の位置を変化させると，ここでは証明を略すが，

$$\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_{2n+3}&u_{2n}\\u_{2n}&u_{2n-3}\end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}\right\}^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_{2n-3}&u_{2n}\\u_{2n}&u_{2n+3}\end{pmatrix}$$

が成り立つ．

(23)と(24)の両辺の行列式を考えると

$$v_n^2-5u_n^2=4(-1)^n \tag{25}$$

$$u_{2n+3}u_{2n-3}-u_{2n}^2=4(-1)^n \tag{26}$$

が成り立つことになる．

《参 考 文 献》

1）山本幸一　フィボナッチ数物語　数学セミナー 1977　vol.10

2）宮地俊彦　フィボナッチ数を割り算で　初等数学第11号　1987

これをヒントに問題作成し，第2回数学問題コンクール(Z会主催)において佳作に入賞した．

3）宮地俊彦　Fibonacci 数の初等的性質(1)九州数学教育会会誌「情報」107号　1981

4）宮地俊彦　フィボナッチ数と二項係数　初等数学第9号　1986

5）―― Fibonacci 数の初等的性質(8)　九州数学教育会会誌「情報」114号　1984

（福岡県立八幡中央高等学校）