2つの放物線の共通接線について

渋谷（しぶや）　勤（つとむ）

0. はじめに

放物線の接線の方程式は，微分を履修すれば求めることができます．あるいは，定点が与えられていれば判別式を使った解法もあります．ここでは，2つの異なる(一致しない)放物線の共通接線について考えてみましょう．

1. 存在条件

> 2つの放物線
> $y=ax^2$ ……①
> $y=b(x-p)^2+q$ ……②
> の共通接線の本数を求める．

①上の点$(t,\ at^2)$における接線の方程式は，

$y=2atx-at^2$ ……③

③と②からyを消去して

$$bx^2-2(bp+at)x+bp^2+q+at^2=0$$

$$\frac{D}{4}=(bp+at)^2-b(bp^2+q+at^2)$$

$$=a(a-b)t^2+2abpt-bq$$

$\dfrac{D}{4}=0$ を満たす実数解の個数が共通接線の本数である．

$a(a-b)t^2+2abpt-bq=0$ ……④　について

(1)　$a=b$ のとき

④は　$2a^2pt-aq=0$

$a(2apt-q)=0$

$a\neq0$ より　$2apt=q$

$p=0$ のとき $q=0$ であれば，任意の実数が解となる．(このとき，①，②は一致する．)

$p=0$ のとき $q\neq0$ であれば，実数解は存在しない．

$p\neq0$ のとき $t=\dfrac{q}{2ap}$ となり，実数解は1個である．

(2)　$a\neq b$ のとき　④において

$$\frac{D_t}{4}=(abp)^2-a(a-b)(-bq)$$

$$=ab\{abp^2+q(a-b)\}=a^2b^2\left\{p^2+\frac{q(a-b)}{ab}\right\}$$

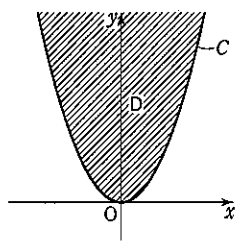
よって　$\dfrac{D_t}{4}=0 \iff q=\dfrac{ab}{b-a}p^2$

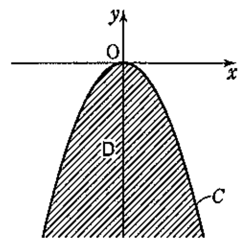
$\dfrac{D_t}{4}>0 \iff p^2>\dfrac{b-a}{ab}q$

$\dfrac{D_t}{4}<0 \iff p^2<\dfrac{b-a}{ab}q$

ここで放物線C：$y=\dfrac{ab}{b-a}x^2$ について，Cを境界とする凸領域(境界のCを含まない)をDとする．

$\dfrac{ab}{b-a}>0$ のとき　　$\dfrac{ab}{b-a}<0$ のとき



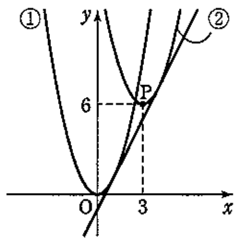


以上をまとめると，次のようになります．

> 2つの放物線
> $y=ax^2$ ……①
> $y=b(x-p)^2+q$ ……②
> の共通接線の本数は
> $a=b$ のとき，
> $p=q=0$ ならば無限本(①，②は一致)
> $p=0$，$q\neq0$ ならば0本
> $p\neq0$ ならば任意のqについて1本
> $a\neq b$ のとき，②の頂点$\mathrm{P}(p,\ q)$について
> $\mathrm{P}\in C$ のとき　1本
> $\mathrm{P}\in \mathrm{D}$ のとき　0本
> $\mathrm{P}\notin C\cup \mathrm{D}$ のとき　2本

2. 共通接線を求める

問1. 2つの放物線
$y=x^2$ …… ①
$y=(x-3)^2+6$ …… ②
の共通接線の方程式を求めよ.



[解法1] ①上の点$(t,\ t^2)$における接線の方程式は,

$y=2tx-t^2$ …… ③

これと②より, yを消去して

$x^2-2(t+3)x+t^2+15=0$

$\dfrac{D}{4}=0$ より　$(t+3)^2-(t^2+15)=0$

$t=1$

これを③に代入して, 求める接線の方程式は

$y=2x-1$

[解法2] ①, ②のx^2の係数は等しいので, 接線の傾きは直線OPの傾きと等しくなる.

求める接線を $y=2x+b$ とおく. これと①からyを消去し, $D=0$ とするとbの値が求まる.

$x^2-2x-b=0$

$\dfrac{D}{4}=0$ より　$b=-1$

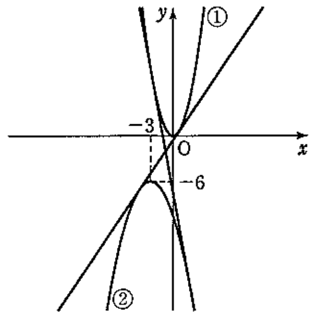
ゆえに, 接線の方程式は

$y=2x-1$

では, 次の問題はどうでしょうか.

問2. 2つの放物線
$y=x^2$ …… ①
$y=-\dfrac{1}{2}(x+3)^2-6$ …… ②
の共通接線の方程式を求めよ.

この場合には2つの放物線が合同ではないので, 問1. [解法2]のようにはいきません. しかも, 共通接線は2本存在します.



[解法1] ①上の点$(t,\ t^2)$における接線の方程式は,

$y=2tx-t^2$ …… ③

これと②より, yを消去して

$x^2+2(2t+3)x+21-2t^2=0$

$\dfrac{D}{4}=0$ より　$(2t+3)^2-(21-2t^2)=0$

$t^2+2t-2=0$

$t=-1\pm\sqrt{3}$

これを③に代入して, 求める共通接線の方程式は

$y=2(-1\pm\sqrt{3})x-4\pm2\sqrt{3}$

すべての放物線は相似です. 三角形と同様に相似を考えていくと, 放物線①と②の相似比は 1：2 となります. この相似比を利用すると, 次のような計算で求まります.

[解法2] 2つの放物線①, ②の頂点O(0, 0), P(−3, −6)を 1：2 の比に内分する点Qは

Q(−1, −2)

この点を通り, 傾きmの直線は

$y=mx+m-2$

これと①より, yを消去して

$x^2-mx-m+2=0$

$D=0$ より　$m^2+4m-8=0$

$m=-2\pm2\sqrt{3}$

ゆえに, 共通接線の方程式は

$y=2(-1\pm\sqrt{3})x-4\pm2\sqrt{3}$

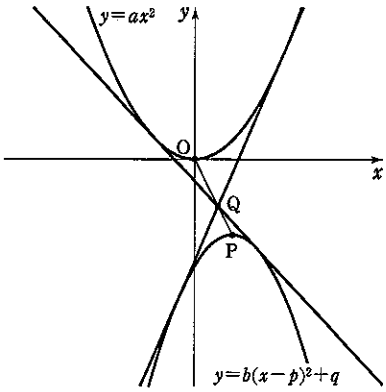
問1, 問2ともに[解答2]は, 微分を知らない生徒でも理解できます. 更に, 次のことが成り立ちます.

[1]　$y=ax^2$,　$y=b(x-p)^2+q$

（$a>0$,　$b<0$ のとき）

共通接線の交点Qは

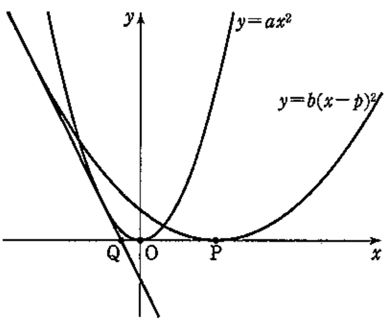
2点O，Pを $(-b):a$ の比に内分する点．



次の[2]，[3]，[4]のどの場合も共通接線の交点Qは2点O，Pを $b:a$ の比に外分する点．

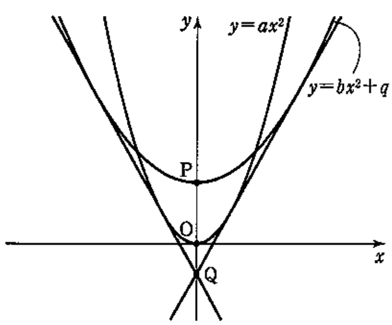
[2]　$y=ax^2$,　$y=b(x-p)^2$

（$a>b>0$,　$p\neq 0$ のとき）



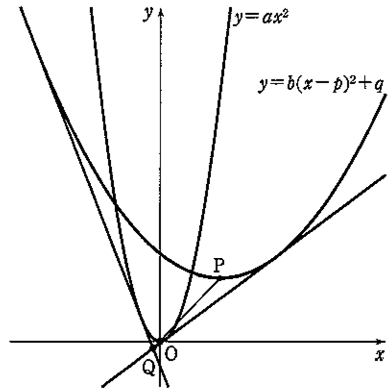
[3]　$y=ax^2$,　$y=bx^2+q$

（$a>b>0$,　$q>0$ のとき）



[4]　$y=ax^2$,　$y=b(x-p)^2+q$

（$a>b>0$,　$p>0$,　$q>0$ のとき）



これらを三角形の相似と同様に考えると，点Qは「相似の中心」になっています．

ここで，$m:n$ の比に分けるとは

$m>0$,　$n>0$ の場合は，$m:n$ の比に内分すること，m，n が異符号の場合は，$|m|:|n|$ の比に外分することであると考えると，一般に次のことが成り立つ．

> 2つの異なる放物線
>
> $C_a: y=a(x-p_1)^2+q_1$ …… ①
>
> $C_b: y=b(x-p_2)^2+q_2$ …… ②
>
> が2本の共通接線をもつとき，これらの交点は，C_a，C_b の頂点を $(-b):a$ に分ける点である．

[証明]　共通接線の交点を $(s,\ t)$ とおく．この点を通り，傾き m の直線は

$$y=m(x-s)+t \quad \cdots\cdots ③$$

これと①より y を消去して

$$ax^2-(2ap_1+m)x+ap_1{}^2+q_1+ms-t=0$$

$D=0$ より

$$(2ap_1+m)^2-4a(ap_1{}^2+q_1+ms-t)=0$$

$$m^2+4a(p_1-s)m+4a(t-q_1)=0 \quad \cdots\cdots ④$$

同様にして，③と②より

$$m^2+4b(p_2-s)m+4b(t-q_2)=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

m についての2次方程式④，⑤の解が一致するので，

$a(p_1-s)=b(p_2-s)$ かつ $a(t-q_1)=b(t-q_2)$

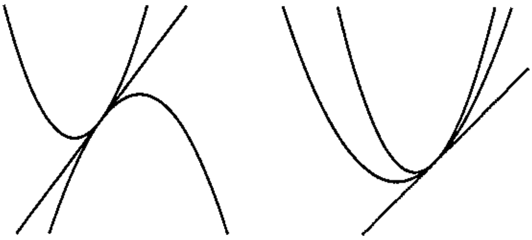
$a=b$ のときは，共通接線はあっても1本だけなので，$a\neq b$ である．よって，

$$s=\frac{ap_1-bp_2}{-b+a},\ t=\frac{aq_1-bq_2}{-b+a}$$

(証明終)

では，共通接線が1本のときはどうでしょうか．

$a \neq b$ のとき，共通接線が1本の場合は次の2通りです．



この接点を $(s,\ t)$ とおいても，前記の[証明]が成り立つので，この場合，C_a，C_b の頂点を $(-b):a$ に分ける点は，接点になります．

《参　考　文　献》

[1]　四訂版　数学I：数研出版

(日本大学習志野高等学校)

発行所　**数研出版株式会社**

東京本社	〒102-0073	東京都千代田区九段北1-12-11	TEL 03(3265)0811（代表）
関西本社	〒604-0867	京都市中京区烏丸丸太町西入ル	TEL 075(231)0161（代表）
さいたま支局	〒336-0018	さいたま市南本町1-16-9-4F	
札幌支店	〒060-0052	札幌市中央区南2条東2丁目9-8 大都ビル	TEL 011(261)1723
仙台支店	〒980-0022	仙台市青葉区五橋2-7-9	TEL 022(215)6933
横浜支店	〒222-0033	横浜市港北区新横浜2-14-27 第一生命第2ビル	
名古屋支店	〒461-0004	名古屋市東区葵3-15-31 住友生命千種ビル	TEL 052(937)3423
広島支店	〒730-0813	広島市中区住吉町9-9 中木ビル	TEL 082(243)6453
福岡支店	〒812-0016	福岡市博多区博多駅南1-2-3 住友博多駅前ビル	TEL 092(411)4245

印刷　寿印刷株式会社　　010401

♻ 本書の中紙には再生紙を使用しています