線形非斉次漸化式 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$, $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=f(n)$ の一般的解法（差分・和分・移動演算子による統一的方法）

秋葉(あきば)　寿夫(ひさお)

はじめに

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$, $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ $(p\neq 0)$ については，個別に種々の方法により一般項 a_n が求められる．ここではこれらの漸化式はもちろん，更に拡張して非斉次型の漸化式の統一的解法を考えてみたい．新しい概念[差分，和分，移動演算子]を導入するとより統一的な漸化式の解法が得られる．一般的に非斉次型漸化式については高校の学習範囲での方法によるとかなり複雑化し，解法についての意欲関心が湧いてこない．少し高い見地から見通しの良い考え方に接すれば生徒の学習意欲も高まると考えられる．はじめに斉次型，続いて非斉次型の漸化式について述べて見たい．まず斉次型の隣接２項間，３項間漸化式について，普通の解法について述べる．

1. 隣接２項間斉次漸化式

$a_1=a$, $a_{n+1}=pa_n$ ならば　$a_n=ap^{n-1}$

ただし，$p\neq 0$ とする．

(証)　$a_{n+1}=pa_n$ より，$\{a_n\}$ は初項 a_1，公比 p の等比数列だから

$$a_n=a_1p^{n-1}=ap^{n-1}\quad (\because\quad a_1=a)$$

以上から

$$\boxed{a_{n+1}=pa_n \text{ ならば }\quad a_n=Ap^{n-1}\ (A:\text{定数})}$$

2. 隣接３項間斉次漸化式

$$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0,\quad a_1=a,\quad a_2=b$$

ただし，$p\neq 0$ とし，α, β は $px^2+qx+r=0$ の解とする．

(1)　$\alpha\neq\beta$ ならば

$$a_n=\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$$

(2)　$\alpha=\beta$ ならば

$$a_n=a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-a\alpha)\alpha^{n-2}$$

(証)　$p\neq 0$ より，$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ から

$$a_{n+2}+\frac{q}{p}a_{n+1}+\frac{r}{p}a_n=0\quad\cdots\cdots ①$$

ここで，$px^2+qx+r=0$ の２つの解が α, β だから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{q}{p},\quad \alpha\beta=\frac{r}{p}$$

よって，①より　　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これを変形して

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\quad\cdots\cdots ②$$

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)\quad\cdots\cdots ③$$

②から，$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ が等比数列をなすことより

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\quad\cdots\cdots ④$$

同様にして，③から

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)\quad\cdots\cdots ⑤$$

⑤−④ から

$$(\alpha-\beta)a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

(1)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$$a_n=\frac{\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{b-a\beta}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}\ (n\geqq 1)$$

よって，n によらない定数 A, B を用いて

$$a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$$

と表せる．ここで，$A=\dfrac{b-a\beta}{\alpha-\beta}$，$B=-\dfrac{b-a\alpha}{\alpha-\beta}$

(2)　$\alpha=\beta\ (\neq 0)$ のとき，④より

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

両辺を α^{n-1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n-1}}-\frac{a_n}{\alpha^{n-2}}=a_2-\alpha a_1$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=a_2-\alpha a_1$

よって，$\{b_n\}$ は等差数列をなすことより

$$b_n=b_1+(n-1)(a_2-\alpha a_1),\quad b_1=\alpha a_1$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_n&=\alpha^{n-2}b_n=\alpha^{n-2}\{\alpha a_1+(n-1)(a_2-\alpha a_1)\}\\&=a_1\alpha^{n-1}+(n-1)(a_2-\alpha a_1)\alpha^{n-2}\\&=a\alpha^{n-1}+(n-1)(b-a\alpha)\alpha^{n-2}\\&=\left\{\left(\frac{b}{\alpha}-a\right)n+2a-\frac{b}{\alpha}\right\}\alpha^{n-1}\end{aligned}$$

よって，n によらない定数 A，B を用いて

$$a_n=(An+B)\alpha^{n-1}$$

と表せる．ここで，$A=\dfrac{b}{\alpha}-a$，$B=2a-\dfrac{b}{\alpha}$

また，$\alpha=\beta=0$ のときもこれでよい．

> 特性方程式 $px^2+qx+r=0$ の解が α，β のとき
> (1)　$\alpha\neq\beta$ のとき　　$a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$
> (2)　$\alpha=\beta$ のとき　　$a_n=(An+B)\alpha^{n-1}$

（A，B は n によらない定数）

3. 隣接 2 項間非斉次漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+f(n)\quad\cdots\cdots\ ①$$

①を満たす数列は無数にある．初項の値(初期条件)を決めると①によって，第 2 項以下が順々に一意的に決まり，数列がただ 1 つ定まる．①を満たす 1 つの数列を①の特殊解という．また，①を満たす数列で，任意定数を 1 つ含むようなものを①の一般解という．一般解が分かれば，初期条件を満たすように任意定数の値を決めることで，漸化式と初期条件を同時に満たす数列を求めることができる．

> 漸化式 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ の一般解は
> 　(斉次の場合 $a_{n+1}=pa_n$ の一般解)+(特殊解)
> で与えられる．

①の一般解の求め方を考える．

まず，特殊解 $\{b_n\}$ が見つかったとする．

$$b_{n+1}=pb_n+f(n)\quad\cdots\cdots\ ②$$

①−② より　　$a_{n+1}-b_{n+1}=p(a_n-b_n)$

ここで，$c_n=a_n-b_n$ とおくと　$c_{n+1}=pc_n$　$\cdots\cdots$ ③

③は $\{c_n\}$ が公比 p の等比数列であることを示す．任意の定数 A に対して，常に $Ap^n=p(Ap^{n-1})$ だから　　$c_n=Ap^{n-1}$　(A は任意定数)

が③の一般解となる．よって，

$$a_n=b_n+c_n=b_n+Ap^{n-1}$$

は漸化式①を満たし，しかも任意定数を 1 つ含んでいるので，①の一般解になる．

①で $f(n)=0$ の場合つまり $a_{n+1}=pa_n$ を斉次の場合という．以上から

(①の一般解)=(斉次の一般解)+(特殊解)

と求められる．

4. 隣接 3 項間非斉次漸化式

> $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=f(n)$　$\cdots\cdots$ ① の一般解は
> (斉次の場合の一般解)+(特殊解) で与えられる．

①の一般解の求め方を考える．

まず，①の特殊解を $\{b_n\}$ とする．

$$pb_{n+2}+qb_{n+1}+rb_n=f(n)\quad\cdots\cdots\ ②$$

①−② より

$$p(a_{n+2}-b_{n+2})+q(a_{n+1}-b_{n+1})+r(a_n-b_n)=0$$

ここで，$c_n=a_n-b_n$ とおくと

$$pc_{n+2}+qc_{n+1}+rc_n=0\quad\cdots\cdots\ ③$$

$px^2+qx+r=0$ の 2 つの解を α，β とすると，③の一般解は

$c_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$ または $c_n=(An+B)\alpha^{n-1}$

これは，①で $f(n)=0$ の場合であり，斉次の場合の一般解と考えられる．

$a_n=b_n+c_n$ であるから

$a_n=b_n+A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$　または

$a_n=b_n+(An+B)\alpha^{n-1}$

以上から

(①の一般解)=(斉次の場合の一般解)+(特殊解)

よって，$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=f(n)$ の一般解は

($pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ の一般解)+(特殊解)

で与えられる．

5. 移動演算子 E

$E^kf(n)=f(n+k)$ のとき，E を移動演算子という．

特に，$n=1$ のとき　　$Ef(n)=f(n+1)$

① $E^2n=n+2$，$E^2n^3=(n+2)^3$

② $E2^n=2^{n+1}=2\cdot2^n$，$E^22^n=2^{n+2}=2^2\cdot2^n$

③ $E2=2$，$Ec=c$　(c は定数)

④ $(E^2+3E+1)2^n=2^{n+2}+3\cdot2^{n+1}+2^n$
$=(2^2+3\cdot2+1)\cdot2^n$

一般に $\boxed{f(E)\alpha^n=f(\alpha)\alpha^n}$ が成り立つ．

⑤ $\dfrac{1}{E^2+3E+1}2^n=\dfrac{1}{2^2+3\cdot2+1}2^n=\dfrac{1}{11}\cdot2^n$

⑥ $\frac{1}{E^2+3E+1}\cdot 3=\frac{1}{E^2+3E+1}\cdot 3\cdot 1^n$

$$=\frac{1}{1^2+3\cdot 1+1}\cdot 3$$

(＊) $f(E)A=f(E)\cdot A\cdot 1^n=f(1)A \quad [A=A\cdot 1^n]$

(A は定数)

ここで，$\frac{1}{f(E)}\alpha^n$ を次のように定義する．

(i) $f(\alpha)\neq 0$ のとき $\frac{1}{f(E)}\alpha^n=\frac{1}{f(\alpha)}\alpha^n$

(ii) $f(\alpha)=0$ のとき

$$\boxed{\frac{1}{f(E)}\alpha^n g(n)=\alpha^n\cdot\frac{1}{f(\alpha E)}\cdot g(n)}$$

よって $\frac{1}{f(E)}\alpha^n=\frac{1}{f(E)}\alpha^n\cdot 1=\alpha^n\cdot\frac{1}{f(\alpha E)}\cdot 1$

⑦ $\frac{1}{(E-2)^2}\cdot 2^n=2^n\cdot\frac{1}{(2E-2)^2}\cdot 1=2^n\cdot\frac{1}{4(E-1)^2}\cdot 1$

$$=2^{n-2}\cdot\frac{1}{(E-1)^2}\cdot 1$$

⑧ $E3\cdot 2^n=3\cdot 2^{n+1}=3E2^n$

⑨ $a_{n+1}-3a_n=Ea_n-3a_n=(E-3)a_n$

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=E^2a_n-5Ea_n+6a_n$

$=(E^2-5E+6)a_n$

6. 差分 Δ

負でない整数 x の関数 $f(x)$ について

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

のとき，これを $f(x)$ の差分という．

① $\Delta c=c-c=0$ （c は定数） $\Delta 2=0$

② $\Delta n=(n+1)-n=1$,

$\Delta n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$

$\Delta n^3=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

③ $\Delta a^n=a^{n+1}-a^n=(a-1)a^n$, $\Delta 2^n=(2-1)\cdot 2^n$

$\Delta 3^n=(3-1)\cdot 3^n$

n が正の整数のとき

$$\boxed{x^{(n)}=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)}$$

と定め，これを x の階乗関数という．

④ $x^{(1)}=x$, $x^{(2)}=x(x-1)$, $x^{(3)}=x(x-1)(x-2)$

$x=x^{(1)}$, $x^2=x(x-1)+x=x^{(2)}+x^{(1)}$

$x^3=x^{(3)}+3x^{(2)}+x^{(1)}$

⑤ $f(x)=x^3-4x^2-x+2=x^{(3)}-x^{(2)}-4x^{(1)}+2$

$\because$ $f(x)=x^{(3)}+3x^{(2)}+x^{(1)}-4(x^{(2)}+x^{(1)})-x^{(1)}+2$

$=x^{(3)}-x^{(2)}-4x^{(1)}+2$

定理 1． a, b が定数のとき

$$\Delta\{af(x)+bg(x)\}=a\Delta f(x)+b\Delta g(x)$$

(証) $\Delta\{af(x)+bg(x)\}=\{af(x+1)+bg(x+1)\}$

$-\{af(x)+bg(x)\}$

$=a\{f(x+1)-f(x)\}+b\{g(x+1)-g(x)\}$

$=a\Delta f(x)+b\Delta g(x)$

(i) $\Delta\{f(x)\cdot g(x)\}=\Delta f(x)\cdot g(x+1)+f(x)\cdot\Delta g(x)$

(ii) $\Delta\frac{1}{f(x)}=-\frac{\Delta f(x)}{f(x)f(x+1)}$

(iii) $\Delta\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\Delta f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{g(x)\cdot g(x+1)}$

(証) $\Delta\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+1)}{g(x+1)}-\frac{f(x)}{g(x)}$

$$=\frac{f(x+1)g(x)-f(x)g(x+1)}{g(x)g(x+1)}$$

この分子は

$f(x+1)g(x)-f(x)g(x)-f(x)g(x+1)+f(x)g(x)$

$=\{f(x+1)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+1)-g(x)\}$

$=\Delta f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)$

よって $\Delta\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\Delta f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$

定理 2． $\Delta x^{(n)}=nx^{(n-1)}$ …… (＊)

(証) $\Delta x^{(n)}=(x+1)x\cdots\cdots(x-n+2)$

$-x(x-1)\cdots\cdots(x-n+2)(x-n+1)$

$=(x+1)x^{(n-1)}-(x-n+1)x^{(n-1)}$

$=nx^{(n-1)}$

$n=0$ のとき，$x^{(0)}=x^0=1$ と定めると，

$$\begin{cases}(＊)\text{の左辺}=\Delta x^{(0)}=\Delta 1=0\\ \quad\text{右辺}=0\cdot x^{(0-1)}=0\end{cases}$$

$\therefore$ $\Delta x^{(0)}=0\cdot x^{(0-1)}$

よって，(＊)は $n=0$ のとき成り立つ．

n が負の整数のとき，$n=-m$(m は正の整数)とおいて

$$\boxed{x^{(n)}=x^{(-m)}=\frac{1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+m-1)}}$$

と定める．このとき

$\Delta x^{(n)}=\Delta x^{(-m)}=(x+1)^{(-m)}-x^{(-m)}$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+m-1)(x+m)}$$

$$-\frac{1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+m-1)}$$

$$=\frac{x-(x+m)}{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+m)}$$

$$=-m\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+m)}$$

$$=-mx^{(-(m+1))}=-mx^{(-m-1)}=n\cdot x^{(n-1)}$$

よって，(*) は n が負の整数のときも成り立つ．
以上から，(*) はすべての整数 n に対して成り立つ．

⑦ $\Delta x^{(-2)}=-2x^{(-3)}$

更に拡張して，

$$\boxed{\begin{aligned}(ax+b)^{(n)}=&(ax+b)\{a(x-1)+b\}\{a(x-2)+b\}\\&\cdots\cdots\{a(x-n+1)+b\}\end{aligned}}$$

と定めると

⑧ $\Delta(ax+b)^{(4)}=4a(ax+b)^{(3)}$

$\because$) $\Delta(ax+b)^{(4)}=\{a(x+1)+b\}^{(4)}-(ax+b)^{(4)}$

$=\{a(x+1)+b-a(x-3)-b\}(ax+b)$
$\times\{a(x-1)+b\}\{a(x-2)+b\}$
$=4a(ax+b)^{(3)}$

⑨ (i) $\Delta(ax)^{(n)}=an(ax)^{(n-1)}$

(ii) $\Delta(ax+b)^{(n)}=an(ax+b)^{(n-1)}$

(証) (i) $\Delta(ax)^{(n)}$

$=\{a(x+1)\}(ax)\{a(x-1)\}\cdots\cdots\{a(x-n+2)\}$
$-(ax)\{a(x-1)\}\{a(x-2)\}$
$\cdots\cdots\{a(x-n+2)\}\{a(x-n+1)\}$
$=\{a(x+1)-a(x-n+1)\}(ax)\{a(x-1)\}$
$\cdots\cdots\{a(x-n+2)\}$
$=an(ax)^{(n-1)}$

(ii) $\Delta(ax+b)^{(n)}$

$=\{a(x+1)+b\}(ax+b)\{a(x-1)+b\}$
$\cdots\cdots\{a(x-n+2)+b\}-(ax+b)\{a(x-1)+b\}$
$\cdots\cdots\{a(x-n+2)+b\}\{a(x-n+1)+b\}$
$=\{a(x+1)+b-a(x-n+1)-b\}(ax+b)$
$\times\{a(x-1)+b\}\cdots\cdots\{a(x-n+2)+b\}$
$=an(ax+b)^{(n-1)}$

7. 和分 Δ^{-1}

x を負でない整数として
$\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)=f(x)$ のとき，
$F(x)=\Delta^{-1}f(x)$ とかく．
これを $f(x)$ の不定和分という．

① $\Delta^{-1}0=C$ (C は定数)

$\because$) $\Delta C=C-C=0$

② $F(x)$ を $f(x)$ の1つの不定和分とすれば
$\Delta^{-1}f(x)=F(x)+C$ （C：和分定数）

(証) $f(x)$ の任意の不定和分を $G(x)$ とすると
$\Delta G(x)=f(x)$，$\Delta F(x)=f(x)$ (仮定より)
$\therefore$ $\Delta G(x)-\Delta F(x)=f(x)-f(x)=0$
$\therefore$ $\Delta\{G(x)-F(x)\}=0$
$\therefore$ $G(x)-F(x)=C$ すなわち $G(x)=F(x)+C$
よって，$\Delta^{-1}f(x)=F(x)+C$ （C は定数）

③ $\Delta^{-1}1=x+C$ （$\because$ $\Delta x=1$）

④ $\Delta^{-1}x^{(n)}=\dfrac{1}{n+1}\cdot x^{(n+1)}+C$

(証) $\Delta\dfrac{1}{n+1}x^{(n+1)}=\dfrac{1}{n+1}\times(n+1)x^{(n)}=x^{(n)}$

⑤ $\Delta^{-1}a^x=\dfrac{1}{a-1}a^x+C$ （$a>0$，$a\neq1$），
$\Delta^{-1}2^x=2^x+C$

$\because$) $\Delta\dfrac{1}{a-1}a^x=\dfrac{1}{a-1}\Delta a^x=\dfrac{1}{a-1}\times(a-1)a^x=a^x$

⑥ $\Delta^{-1}1=n+C$ （$\because$ $\Delta n=\Delta n^{(1)}=1$）

$\Delta^{-1}n=\Delta^{-1}n^{(1)}=\dfrac{1}{2}n^{(2)}+C\left(\because\ \Delta\dfrac{1}{2}n^{(2)}=n^{(1)}=n\right)$

$\Delta^{-2}1=\Delta^{-1}(\Delta^{-1}1)=\dfrac{1}{2}n^{(2)}+C$，$\Delta^{-2}n=\dfrac{1}{6}n^{(3)}+C$

定理3．

(i) $\Delta^{-1}Cf(x)=C\Delta^{-1}f(x)$ （C は定数）

(ii) $\Delta^{-1}\{f(x)\pm g(x)\}=\Delta^{-1}f(x)\pm\Delta^{-1}g(x)$
(複号同順)

(証) (i) $\Delta^{-1}f(x)=F(x)$ とおくと，$f(x)=\Delta F(x)$ と表せる．
$Cf(x)=C\Delta F(x)$ より $Cf(x)=\Delta CF(x)$
$\therefore$ $CF(x)=\Delta^{-1}\cdot Cf(x)$
$\therefore$ $C\Delta^{-1}f(x)=\Delta^{-1}Cf(x)$

(ii) $\Delta^{-1}f(x)=F(x)$，$\Delta^{-1}g(x)=G(x)$ とおくと，
$f(x)=\Delta F(x)$，$g(x)=\Delta G(x)$ とかける．
$\therefore$ $f(x)\pm g(x)=\Delta F(x)\pm\Delta G(x)$
$=\Delta\{F(x)\pm G(x)\}$
$\therefore$ $\Delta^{-1}\{f(x)\pm g(x)\}=F(x)\pm G(x)$
$=\Delta^{-1}f(x)\pm\Delta^{-1}g(x)$

⑦ $\Delta^{-1}n^2=\Delta^{-1}\{n^{(2)}+n^{(1)}\}=\Delta^{-1}n^{(2)}+\Delta^{-1}n^{(1)}$

$=\dfrac{1}{3}n^{(3)}+\dfrac{1}{2}n^{(2)}+C$

$=\dfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)+\dfrac{1}{2}n(n-1)+C$

$=\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+C$

⑧ $\Delta^{-1}(ax+b)^{(n)}=\dfrac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{(n+1)}+C$

(証) $\Delta(ax+b)^{(n+1)}=(n+1)a(ax+b)^{(n)}$

⑨ $\Delta^{-1}x^{(-3)}=-\dfrac{1}{2}x^{(-2)}+C$

定理 4． $\Delta^{-1}f(x)=F(x)$ のとき

$$\sum_{x=1}^{n}f(x)=F(n+1)-F(1)$$

（証） $\Delta^{-1}f(x)=F(x)$ だから

$$f(x)=\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sum_{x=1}^{n}f(x)&=\sum_{x=1}^{n}\{F(x+1)-F(x)\}\\&=\{F(n+1)-F(n)\}+\{F(n)-F(n-1)\}\\&\quad+\{F(n-1)-F(n-2)\}+\cdots\\&\quad\cdots+\{F(3)-F(2)\}+\{F(2)-F(1)\}\\&=F(n+1)-F(1)\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{x=1}^{n}f(x)=\Big[F(x)\Big]_1^{n+1}=\Big[\Delta^{-1}f(x)\Big]_1^{n+1}$

8. 移動演算子 E と差分 Δ と和分 Δ^{-1} の関係

$$\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=Ea_n-a_n=(E-1)a_n$$

$$\therefore\quad \underline{\Delta=E-1}\iff \underline{E=1+\Delta}$$

$\dfrac{1-\Delta^n}{1-\Delta}=1+\Delta+\Delta^2+\cdots\cdots+\Delta^{n-1}$ を利用して

$\boxed{\dfrac{1}{1-\Delta}=1+\Delta+\Delta^2+\cdots\cdots}$ と定める．

① $\dfrac{1}{1+\Delta}=\dfrac{1}{1-(-\Delta)}=1+(-\Delta)+(-\Delta)^2+\cdots\cdots$

$$=1-\Delta+\Delta^2-\cdots\cdots$$

② $\dfrac{1}{1-f(\Delta)}=1+f(\Delta)+\{f(\Delta)\}^2+\cdots\cdots$

$$\frac{1}{E-3}=\frac{1}{(1+\Delta)-3}=\frac{1}{-2+\Delta}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\Delta}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{4}+\cdots\cdots\right)$$

③ $(1+\Delta+\Delta^2+\cdots\cdots)(An+B)=(1+\Delta)(An+B)$

$(1+\Delta+\Delta^2+\cdots\cdots)(An^2+Bn+C)$

$=(1+\Delta+\Delta^2)(An^2+Bn+C)$

∵) $\Delta x^{(n)}=nx^{(n-1)}$ より，Δ の次数を整式の次数に合わせてよい．

$$\Delta 1=0,\quad \Delta n=1,$$

$$\begin{cases}\Delta n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1\\ \Delta n^2=\Delta(n^{(2)}+n^{(1)})=2n^{(1)}+1=2n+1\end{cases}$$

④ $\boxed{\dfrac{1}{\Delta}=\Delta^{-1}}$

∵) $\Delta^{-1}f(x)=F(x)\iff \Delta F(x)=f(x)$

$$\iff F(x)=\frac{1}{\Delta}f(x)$$

$$\therefore\quad \Delta^{-1}f(x)=\frac{1}{\Delta}f(x)\qquad \therefore\quad \Delta^{-1}=\frac{1}{\Delta}$$

$$\frac{1}{\Delta}1=\Delta^{-1}1=n+C$$

$$\frac{1}{\Delta^2}1=\Delta^{-2}1=\Delta^{-1}(\Delta^{-1}1)=\Delta^{-1}n$$

$$=\frac{1}{2}n^{(2)}+C=\frac{1}{2}n(n-1)+C$$

⑤ $\Delta^n=(\Delta)^n$，$\Delta^{-n}=(\Delta^{-1})^n$

以上の考え方を実際の漸化式へ応用してみる．

9. 漸化式への応用

(1) $a_1=3$，$a_{n+1}-5a_n=3\cdot 2^{n-1}$

（解） 与式より $(E-5)a_n=3\cdot 2^{n-1}$ …… ①

$(E-5)a_n=0$ の一般解は $A\cdot 5^{n-1}$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E-5}3\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{2-5}3\cdot 2^{n-1}=-2^{n-1}$$

よって，①の一般解は

$a_n=A\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}$ ←[(一般解)+(特殊解)]

$a_1=A-1=3$ ∴ $A=4$

したがって

$a_n=4\cdot 5^{n-1}-2^{n-1}$ （$n=1$，2，3，……；以下略）

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}-2a_n=3\cdot 2^{n-1}$

（解） 与式より $(E-2)a_n=3\cdot 2^{n-1}$ …… ①

$(E-2)a_n=0$ の一般解は $A\cdot 2^{n-1}$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E-2}3\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2E-2}1=3\cdot 2^{n-2}\cdot\frac{1}{E-1}1$$

$$=3\cdot 2^{n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}1=3\cdot 2^{n-1}\cdot\Delta^{-1}1$$

$$=3\cdot 2^{n-2}\cdot n=3n\cdot 2^{n-2}$$

よって，①の一般解は $a_n=A\cdot 2^{n-1}+3n\cdot 2^{n-2}$

$a_1=A+3\cdot 1\cdot 2^{-1}=A+\dfrac{3}{2}=1$ ∴ $A=-\dfrac{1}{2}$

したがって

$$a_n=-\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}+3n\cdot 2^{n-2}$$

$$=-2^{n-2}+3n\cdot 2^{n-2}=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$$

(3) $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+3^{n+1}$

（解） 与式より $(E-3)a_n=3^{n+1}$ …… ①

$(E-3)a_n=0$ の一般解は $A\cdot 3^{n-1}$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E-3}\cdot 3^{n+1}=3^{n+1}\cdot\frac{1}{3E-3}\cdot 1=3^{n+1}\cdot\frac{1}{3(E-1)}\cdot 1$$

$$=3^n\cdot\frac{1}{\Delta}1=3^n\cdot n$$

よって，①の一般解は　$a_n=A\cdot 3^{n-1}+3^n\cdot n$

$a_1=A+3=3$　$\therefore\ A=0$

したがって　$a_n=3^n\cdot n$

(4)　$a_1=-2,\ a_{n+1}+2a_n=n-2$

(解)　与式より　$(E+2)a_n=n-2$　…… ①

$(E+2)a_n=0$ の一般解は　$A\cdot(-2)^{n-1}$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E+2}(n-2)=\frac{1}{1+\Delta+2}(n-2)$$

$$=\frac{1}{3\left(1+\frac{\Delta}{3}\right)}(n-2)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{\Delta}{3}\right)}(n-2)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\Delta}{3}\right)(n-2)$$

$$=\frac{1}{3}\left(n-2-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(n-\frac{7}{3}\right)$$

よって，①の一般解は

$$a_n=A(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(n-\frac{7}{3}\right)$$

$$a_1=A+\frac{1}{3}\left(1-\frac{7}{3}\right)=-2$$

$$\therefore\ A+\frac{1}{3}\left(\frac{-4}{3}\right)=-2\qquad\therefore\ A=-\frac{14}{9}$$

したがって

$$a_n=-\frac{14}{9}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(n-\frac{7}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\{7(-2)^n+3n-7\}$$

(5)　$a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n+2n^2+1$

(解)　$(E-3)a_n=2n^2+1$　…… ①

$(E-3)a_n=0$ の一般解は　$A\cdot 3^{n-1}$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E-3}(2n^2+1)=\frac{1}{1+\Delta-3}(2n^2+1)$$

$$=\frac{1}{-2\left(1-\frac{\Delta}{2}\right)}(2n^2+1)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta}{2}+\frac{\Delta^2}{4}\right)(2n^2+1)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(2n^2+1)+\frac{1}{2}(4n+2)+\frac{1}{4}\cdot 4\right\}$$

$$=-n^2-n-\frac{3}{2}$$

よって，①の一般解は

$$a_n=A\cdot 3^{n-1}-n^2-n-\frac{3}{2}$$

$$a_1=A-1-1-\frac{3}{2}=1\qquad\therefore\ A=\frac{9}{2}$$

したがって

$$a_n=\frac{9}{2}\cdot 3^{n-1}-n^2-n-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(3^n-1)-n^2-n$$

(6)　$a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=4$

(解)　与式より　$(E^2-3E+2)a_n=4$　…… ①

特性方程式は　$x^2-3x+2=0$

$\therefore\ x=1,\ 2$ (特性根)

よって，$(E^2-3E+2)a_n=0$ の一般解は

$$a_n=A\cdot 1^{n-1}+B\cdot 2^{n-1}$$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E^2-3E+2}4=\frac{1}{(E-1)(E-2)}4=\frac{1}{\Delta(\Delta-1)}4$$

$$=-\frac{1}{1-\Delta}\left(\frac{1}{\Delta}4\right)=-\frac{1}{1-\Delta}(4n)$$

$$=-(1+\Delta)(4n)=-(4n+4)=-4n-4$$

よって，①の一般解は　$a_n=A+B\cdot 2^{n-1}-4n-4$

$$\begin{cases}a_1=A+B-4-4=1\\ a_2=A+2B-8-4=5\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}A+B=9\\ A+2B=17\end{cases}\qquad A=1,\ B=8$$

したがって

$$a_n=1+8\cdot 2^{n-1}-4n-4=4(2^n-n)-3$$

(7)　$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=n$

(解)　与式より　$(E^2-2E+1)a_n=n$　…… ①

特性方程式は　$x^2-2x+1=0$

$\therefore\ (x-1)^2=0$　$\therefore\ x=1$ (特性根)

よって，$(E-1)^2a_n=0$ の一般解は

$$(An+B)\cdot 1^{n-1}=An+B$$

①の特殊解は

$$\frac{1}{(E-1)^2}n=\frac{1}{\Delta^2}n=\Delta^{-2}n^{(1)}=\Delta^{-1}(\Delta^{-1}n^{(1)})$$

$$=\Delta^{-1}\left(\frac{1}{2}n^{(2)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}n^{(3)}=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

よって，①の一般解は

$$a_n=An+B+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

$$\begin{cases}a_1=A+B=0\\ a_2=2A+B=1\end{cases}\qquad\therefore\ A=1,\ B=-1$$

したがって

$$a_n=n-1+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

$$=\frac{n-1}{6}\{6+n(n-2)\}=\frac{1}{6}(n-1)(n^2-2n+6)$$

(8) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=n+3^n$

(解) 与式より　$(E-2)^2a_n=n+3^n$ ……①

特性方程式は　$(x-2)^2=0$　∴ $x=2$ (特性根)

2つの特殊解 p_n, q_n を考えると

$$p_n=\frac{1}{(E-2)^2}n=\frac{1}{(\Delta-1)^2}n=\frac{1}{(1-\Delta)^2}n$$

$$=\frac{1}{1-2\Delta+\Delta^2}n$$

$$=(1+2\Delta)n=n+2\cdot1=n+2$$

$$q_n=\frac{1}{(E-2)^2}3^n=\frac{1}{(3-2)^2}3^n=3^n$$

よって，①の一般解は

$$a_n=(An+B)\cdot2^{n-1}+3^n+n+2$$

$$\begin{cases}a_1=A+B+6=1\\ a_2=2(2A+B)+9+4=2\end{cases}$$

$$\therefore\quad A=-\frac{1}{2},\ B=-\frac{9}{2}$$

したがって　$a_n=-(n+9)\cdot2^{n-2}+3^n+n+2$

(9) $a_1=0$, $a_2=2$, $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2$

(解) 与式より　$(E-1)^2a_n=2$ ……①

特性方程式は　$(x-1)^2=0$　∴ $x=1$ (特性根)

$(E-1)^2a_n=0$ の一般解は

$$(An+B)\cdot1^{n-1}=An+B$$

①の特殊解は

$$\frac{1}{(E-1)^2}2=\frac{1}{\Delta^2}2=\Delta^{-2}2=\Delta^{-1}(\Delta^{-1}2)=\Delta^{-1}(2n)$$

$$=2\Delta^{-1}n^{(1)}=2\cdot\frac{1}{2}n^{(2)}$$

$$=n(n-1)$$

よって，①の一般解は　$a_n=An+B+n(n-1)$

$$\begin{cases}a_1=A+B=0\\ a_2=2A+B+2=2\end{cases}\quad\therefore\quad A=0,\ B=0$$

したがって　$a_n=n(n-1)$

(10) $a_1=2$, $a_2=0$, $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8$

(解) 与式より　$(E-1)^2a_n=2n-8$ ……①

$(E-1)^2a_n=0$ の一般解は

$$(An+B)\cdot1^{n-1}=An+B$$ ((9)より)

①の特殊解は

$$\frac{1}{(E-1)^2}(2n-8)=\frac{1}{\Delta^2}(2n-8)=\frac{1}{3}n^{(3)}-4n^{(2)}$$

$$=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)-4n(n-1)$$

$$=\frac{1}{3}n(n-1)(n-14)$$

よって，①の一般解は

$$a_n=An+B+\frac{1}{3}n(n-1)(n-14)$$

$$\begin{cases}a_1=A+B=2\\ a_2=2A+B-8=0\end{cases}\quad\therefore\quad A=6,\ B=-4$$

したがって

$$a_n=6n-4+\frac{1}{3}n(n-1)(n-14)$$

$$=\frac{1}{3}(n^3-15n^2+32n-12)$$

$$=\frac{1}{3}(n-2)(n^2-13n+6)$$

(11) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=3n^2+5n-2$

(解) 与式より

$$(E^2-5E+6)a_n=3n^2+5n-2\quad\cdots\cdots ①$$

特性方程式は　$x^2-5x+6=0$

∴ $x=2$, 3 (特性根)

$(E^2-5E+6)a_n=0$ の一般解は

$$A\cdot2^{n-1}+B\cdot3^{n-1}$$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E^2-5E+6}(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{(E-2)(E-3)}(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{(\Delta-1)(\Delta-2)}(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{2-3\Delta+\Delta^2}(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}\Delta+\frac{1}{2}\Delta^2}(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}(3\Delta-\Delta^2)}(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}(3\Delta-\Delta^2)+\frac{1}{4}(3\Delta-\Delta^2)^2\right\}\times(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{9}{4}\Delta^2\right)(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}\Delta+\frac{7}{4}\Delta^2\right)(3n^2+5n-2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[3n^2+5n-2+\frac{3}{2}\{3(2n+1)+5\}+\frac{7}{4}\cdot3\cdot2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(3n^2+5n-2+9n+12+\frac{21}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3n^2+14n+\frac{41}{2}\right)$$

よって，①の一般解は

$$a_n=A\cdot 2^{n-1}+B\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{2}\left(3n^2+14n+\frac{41}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a_1=A+B+\dfrac{75}{4}=1 \\ a_2=2A+3B+\dfrac{121}{4}=2 \end{cases} \quad \therefore\ A=-25,\ B=\frac{29}{4}$$

したがって

$$a_n=-25\cdot 2^{n-1}+\frac{29}{4}\cdot 3^{n-1}+\frac{1}{2}\left(3n^2+14n+\frac{41}{2}\right)$$

$$=-25\cdot 2^{n-1}+\frac{29}{4}\cdot 3^{n-1}+\frac{6n^2+28n+41}{4}$$

(12) $a_1=0,\ a_2=1,\ a_n+a_{n-1}-2a_{n-2}=2^{n-2}$

(解) 与式より　$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=2^n$

$\therefore\ (E^2+E-2)a_n=2^n$　…… ①

特性方程式は　$x^2+x-2=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$ (特性根)

$(E^2+E-2)a_n=0$ の一般解は

$$A\cdot 1^{n-1}+B\cdot(-2)^{n-1}$$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E^2+E-2}2^n=\frac{1}{2^2+2-2}2^n=2^{n-2}$$

よって，①の一般解は

$$a_n=A\cdot 1^{n-1}+B\cdot(-2)^{n-1}+2^{n-2}$$

$$\begin{cases} a_1=A+B+\dfrac{1}{2}=0 \\ a_2=A-2B+1=1 \end{cases} \quad \therefore\ A=-\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{6}$$

したがって

$$a_n=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(-2)^{n-1}+2^{n-2}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(-2)^{n-2}+2^{n-2}$$

$$=\frac{3\cdot 2^{n-2}+(-2)^{n-2}-1}{3}$$

(13) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=2^n$

(解) 与式より　$(E^2-4E+4)a_n=2^n$　…… ①

特性方程式は　$x^2-4x+4=0$

$\therefore\ (x-2)^2=0$　　$\therefore\ x=2$

$(E-2)^2a_n=0$ の一般解は　$(An+B)\cdot 2^{n-1}$

①の特殊解は

$$\frac{1}{(E-2)^2}2^n=2^n\cdot\frac{1}{(2E-2)^2}\cdot 1=2^n\cdot\frac{1}{4(E-1)^2}\cdot 1$$

$$=2^{n-2}\cdot\frac{1}{\Delta^2}1=2^{n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta}1\right)=2^{n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}n^{(1)}$$

$$=2^{n-2}\cdot\frac{1}{2}n^{(2)}=2^{n-3}\cdot n^{(2)}=2^{n-3}\cdot n(n-1)$$

よって，①の一般解は

$$a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}+2^{n-3}\cdot n(n-1)$$

$$\begin{cases} a_1=A+B=1 \\ a_2=(2A+B)\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=2 \end{cases}$$

$$\therefore\ A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{3}{2}$$

したがって

$$a_n=\left(-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot 2^{n-1}+2^{n-3}\cdot n(n-1)$$

$$=2^{n-3}(n^2-3n+6)$$

(14) $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}-6a_{n+1}+8a_n=12$

(解) 与式より　$(E^2-6E+8)a_n=12$　…… ①

特性方程式は　$x^2-6x+8=0$　　$\therefore\ x=2,\ 4$

$(E^2-6E+8)a_n=0$ の一般解は

$$A\cdot 2^{n-1}+B\cdot 4^{n-1}$$

①の特殊解は

$$\frac{1}{E^2-6E+8}12=\frac{1}{E^2-6E+8}12\times 1^n$$

$$=12\cdot\frac{1}{1-6+8}\cdot 1^n=4$$

よって，①の一般解は　$a_n=A\cdot 2^{n-1}+B\cdot 4^{n-1}+4$

$$\begin{cases} a_1=A+B+4=0 \\ a_2=2A+4B+4=1 \end{cases} \quad \therefore\ A=-\frac{13}{2},\ B=\frac{5}{2}$$

したがって

$$a_n=-\frac{13}{2}\cdot 2^{n-1}+\frac{5}{2}\cdot 4^{n-1}+4$$

$$=\frac{1}{2}(5\cdot 4^{n-1}-13\cdot 2^{n-1})+4$$

以上見てきたように，非斉次漸化式は移動演算子，差分，和分の考え方により，統一的に扱えることが分かる．漸化式指導の一助になれば幸いである．

《参　考　文　献》

1　合格王の数学解答術：東進ブックス：安本肇著

2　数列・級数：アレフ社：板垣正亮・土師政雄著

（茨城県立藤代高等学校）