数研通信 No.36 掲載の「$(a+b\sqrt{m})^n$ の展開式について」を読んで

熊野（くまの） 充博（みつひろ）

標記の前田淳一氏の論説について，読後感を率直に述べさせて頂きます．

(1) 「**1. はじめに**」，「**2. 隣接 3 項間の漸化式**」については，よく知られた事柄でもあり，特にコメントすることはありません．

(2) 「**3. 展開式の係数の満たす漸化式**」について

前田氏は，

$$(a+b\sqrt{m})^n=x_n+y_n\sqrt{m} \qquad ①$$

(a，$b\in\mathbb{Q}$，$m\in\mathbb{Z}$ かつ m は平方因子を含まない)

とおいて，次の漸化式

$$\begin{cases} x_n=ax_{n-1}+bmy_{n-1} \\ y_n=bx_{n-1}+ay_{n-1} \end{cases} \qquad ②$$

を導いています．このように，$(a+b\sqrt{m})^n$ の計算を連立漸化式に直して行う手法は，ペル方程式の解法に関連して既に知られています(文献 [1])．ただ，前田氏のように，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ のそれぞれ単独の 3 項間漸化式にして $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の値を求める手法は，新しいアイデアではないかと思います(こうすれば，表計算ソフトで計算するのも容易になります)．

(3) 「**4. いくつかの例**」について

前田氏は，氏のアイデアの応用として，

$$a_{n+2}=2\sqrt{3}\,a_{n+1}-4a_n \qquad ③$$

なる漸化式を取り上げています．初期値との関連で，

$$a_3=a_9=\cdots\cdots=a_{3+6k}=\cdots\cdots=0 \quad (k\geqq 0,\ k\in\mathbb{Z})$$

を導いています．

ところで，この漸化式の〝カラクリ〟はどうなっているのか，その〝正体〟(？)に迫ってみたいと思います．

漸化式③の特性方程式は，

$$x^2-2\sqrt{3}\,x+4=0 \quad \cdots\cdots ④$$

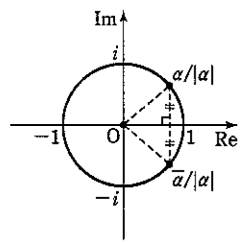
です．

この 2 解は，$\sqrt{3}\pm i$ で，$\alpha=\sqrt{3}+i$ とおくと，$\overline{\alpha}=\sqrt{3}-i$ です．

$|\alpha|=\sqrt{3+1}=2$ なので，$\alpha/|\alpha|$，$\overline{\alpha}/|\alpha|$ を考えると，これらの複素数は，単位円周上の点となります．

$$\therefore \quad \alpha/|\alpha|+\overline{\alpha}/|\alpha|=2\sqrt{3}/2=\sqrt{3}$$

$$(\alpha/|\alpha|)\cdot(\overline{\alpha}/|\alpha|)=1$$



従って，$\alpha/|\alpha|$，$\overline{\alpha}/|\alpha|$ を 2 解にもつような特性方程式は，

$$x^2-\sqrt{3}\,x+1=0 \qquad ⑤$$

であり，これに対応する漸化式 $\{b_n\}$ は，

$$b_{n+2}-\sqrt{3}\,b_{n+1}+b_n=0 \qquad ⑥$$

です．$\{b_n\}$ のつくり方から分かるように，

$b_n=a_n/2^n$ …… ⑦ という関係があります(③式からもすぐ出て来ますが)．

⑤の両辺に，$x^2+\sqrt{3}\,x+1$ を乗ずると，

$$x^4-x^2+1=0 \qquad ⑧$$

⑧の両辺に x^2+1 を乗ずると，

$$x^6+1=0 \quad (\therefore\ x^6=-1) \qquad ⑨$$

よって，$x^{12}=1$ …… ⑩ となります．

従って，⑨，⑩から分かるように，$\{b_n\}$ は円分多項式⑧から，

$$b_{n+6}=-b_n, \qquad b_{n+12}=b_n$$

を満たすことが(初期値に関係なく)確かめられます．前田氏の与えた初期値からは，$b_3=0$ となるので，

$b_{3+6}=b_9=-b_3=0$，一般に，

$$b_3=b_{3+6k}=0 \ (\forall k\in\mathbb{Z},\ k\geqq 1)$$

あとは，$a_n=b_n/2^n$ で，もとの $\{a_n\}$ の関係に書き戻せばよいでしょう．つまるところ，漸化式③の見かけはともかく，③に適当な変換を行うと，その特性方程式は円分多項式⑧を満たしていたわけです．

$\{b_n\}$ すなわち，$\{a_n/2^n\}$ は周期 12 をもつ数列です．なお，周期をもつ数列を解にもつような(整数係数である)線形漸化式の特性方程式は，円分多項式に限ることが既に知られていることを付け加えておきます．(以上)

(補足) ③に対する *Mathematica* による計算結果を右に添付します．

《参 考 文 献》

[1] 一松信 「$\sqrt{2}$ の数学」(海鳴社)

[2] Essays on Numbers and Figures ;
2000 年(A. M. S)

[3] 植野義明 周期をもつ数列の漸化式について
「数学工房」第 4 巻・第 1 号 (サイエンティスト社)

(広島県立福山工業高等学校)


```
Clear[a, p, q];
a[1]:=p; a[2]:=q;
a[n_]:=a[n]=2*Sqrt[3]*a[n-1]-4*a[n-2];
Table[a[n]/2^n, {n, 1, 13}]//Simplify
```

$$\left\{\frac{p}{2}, \frac{q}{4}, \frac{-p}{2}+\frac{\mathrm{Sqrt}[3]q}{4}, \frac{-(\mathrm{Sqrt}[3]p)+q}{2}, -p+\frac{\mathrm{Sqrt}[3]q}{4}, \frac{-2\,\mathrm{Sqrt}[3]p+q}{4}, \frac{-p}{2}, \frac{-q}{4}, \frac{p}{2}-\frac{\mathrm{Sqrt}[3]q}{4}, \frac{\mathrm{Sqrt}[3]p-q}{2}, p-\frac{\mathrm{Sqrt}[3]q}{4}, \frac{\mathrm{Sqrt}[3]p}{2}-\frac{q}{4}, \frac{p}{2}\right\}$$