空間における角について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

1. はじめに

空間図形の角度を扱った大学入試問題にはH３年の京都大学，H４年の東京大学のように難問が多いが，基本的な事項(後述の定理１，定理２)を理解しておくと扱いやすくなると思う．

2. １点に集まる角

> **定理１**　空間内の相異なる４点O，A，B，Cについて，$\alpha=\angle\mathrm{BOC}$，$\beta=\angle\mathrm{COA}$，$\gamma=\angle\mathrm{AOB}$ とおくと，
>
> (1)　$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$0\leqq\gamma\leqq\pi$
>
> (2)　$\beta+\gamma\geqq\alpha$，$\gamma+\alpha\geqq\beta$，$\alpha+\beta\geqq\gamma$
>
> (3)　$\alpha+\beta+\gamma\leqq 2\pi$
>
> が成り立つ．さらに(2)，(3)のどれかの不等式で等号が成立するとき，O，A，B，Cは同一平面上にある．

(証明)　$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\gamma,\ \sin\gamma,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t,\ u)$，$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(\cos\gamma,\ \sin\gamma,\ 0)$，$\vec{c}=(s,\ t,\ u)$，$|\vec{c}|=1$ とおいても一般性を失わない．

このとき，$s=\cos\beta$，

$$\cos\alpha=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\cos\beta\cos\gamma+t\sin\gamma \quad \cdots\cdots ①$$

$$\cos^2\beta+t^2+u^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．$0\leqq\gamma\leqq\alpha\leqq\beta$ として $\alpha+\gamma\geqq\beta$，$\alpha+\beta+\gamma\leqq 2\pi$ を示す．①を用いると

$$\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)=\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma$$
$$=\sin\gamma(t+\sin\beta) \quad \cdots\cdots ③$$

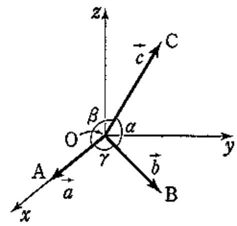
$$\cos\alpha-\cos(\beta-\gamma)=\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$$
$$=\sin\gamma(t-\sin\beta) \quad \cdots\cdots ④$$

②より $t^2+u^2=\sin^2\beta$ であるから $-\sin\beta\leqq t\leqq\sin\beta$ となる．したがって，③，④より

$$\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)\geqq 0,\ \cos\alpha-\cos(\beta-\gamma)\leqq 0$$

$$\therefore\quad \cos(\beta+\gamma)\leqq\cos\alpha\leqq\cos(\beta-\gamma)$$

$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta-\gamma\leqq\pi$ なので $\cos\alpha\leqq\cos(\beta-\gamma)$ から $\alpha\geqq\beta-\gamma$ すなわち $\gamma+\alpha\geqq\beta$ を得る．



$\gamma+\alpha=\beta$ のときは，④より，$\sin\gamma=0$ または $t=\sin\beta$，すなわち $\sin\gamma=0$ または $u=0$ となるから，４点O，A，B，Cは同一平面上にある．

次に，$\alpha+\beta+\gamma\leqq 2\pi$ を示す．

$\beta+\gamma<\pi$ のときは

$$\alpha+\beta+\gamma<\alpha+\pi\leqq 2\pi,$$

$\beta+\gamma\geqq\pi$ のときは

$$\pi\leqq\beta+\gamma\leqq 2\pi,\quad \pi\leqq 2\pi-\alpha\leqq 2\pi$$

であり

$$\cos(\beta+\gamma)\leqq\cos\alpha=\cos(2\pi-\alpha)$$

であるから，$\beta+\gamma\leqq 2\pi-\alpha$ すなわち $\alpha+\beta+\gamma\leqq 2\pi$ を得る．

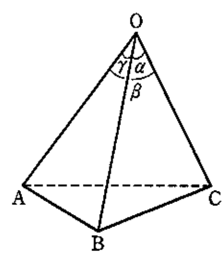
$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ のときは，③より $\sin\gamma=0$ または $t=-\sin\beta$，すなわち，$\sin\gamma=0$ または $u=0$ となるから，４点O，A，B，Cは同一平面上にある．▨

※１　α，β，γ を便宜的に１点Oに集まる角と呼ぶことにする．

※２　座標(軸)設定は類題１にならった．

４点O，A，B，Cが同一平面上にない場合を考えて，次の定理２を得る．

> **定理２**
>
> 三角錐O-ABCで
>
> $\alpha=\angle\mathrm{BOC}$，
>
> $\beta=\angle\mathrm{COA}$，
>
> $\gamma=\angle\mathrm{AOB}$
>
> とおくと



(1) $\beta+\gamma>\alpha$, $\gamma+\alpha>\beta$, $\alpha+\beta>\gamma$

(2) $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$

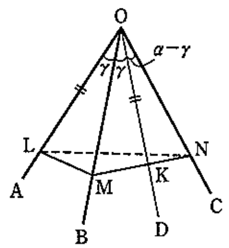
が成り立つ．

ベクトルを用いない一般的な証明は次のようになる．

(証明) (1) $\beta+\gamma>\alpha$ …… ① を示す．

$\gamma\geqq\alpha$ のとき①は明らかに成り立つから，$\gamma<\alpha$ の場合を考える．

$\angle$BOC 内に半直線 OD を $\angle\mathrm{BOD}=\gamma$ となるように引く．半直線 OB，OC 上にそれぞれ点 M，N をとり，MN と OD の交点を K とする．次に，半直線 OA 上に OL＝OK となる点Lをとる．



$\beta>\alpha-\gamma$ すなわち $\angle\mathrm{LON}>\angle\mathrm{KON}$ を示す．

$\triangle\mathrm{OLM}\equiv\triangle\mathrm{OKM}$ から

$$\mathrm{LM}=\mathrm{KM} \quad \cdots\cdots ②$$

$\triangle$LMN において

$$\mathrm{LM}+\mathrm{LN}>\mathrm{MN}=\mathrm{MK}+\mathrm{KN}=\mathrm{LM}+\mathrm{KN} \quad (\because ②)$$

$$\therefore \quad \mathrm{LN}>\mathrm{KN} \quad \cdots\cdots ③$$

$\triangle$OLN と $\triangle$OKN において余弦定理を用いると

$$\cos\angle\mathrm{LON}=\frac{\mathrm{OL}^2+\mathrm{ON}^2-\mathrm{LN}^2}{2\mathrm{OL}\cdot\mathrm{ON}} < \frac{\mathrm{OK}^2+\mathrm{ON}^2-\mathrm{KN}^2}{2\mathrm{OK}\cdot\mathrm{ON}} =\cos\angle\mathrm{KON}$$

したがって，$\angle\mathrm{LON}>\angle\mathrm{KON}$ すなわち $\beta+\gamma>\alpha$ が成り立つ．

(2) 1点Oに集まる角についての(1)の不等式をそれぞれ A，B，C に適用すると

$$\angle\mathrm{OAB}+\angle\mathrm{OAC}>\angle\mathrm{BAC}$$
$$\angle\mathrm{OBC}+\angle\mathrm{OBA}>\angle\mathrm{ABC}$$
$$\angle\mathrm{OCB}+\angle\mathrm{OCA}>\angle\mathrm{ACB}$$

辺々加えると

$$(\angle\mathrm{OAB}+\angle\mathrm{OBA})+(\angle\mathrm{OAC}+\angle\mathrm{OCA})+(\angle\mathrm{OBC}+\angle\mathrm{OCB})>\pi$$

$$(\pi-\gamma)+(\pi-\beta)+(\pi-\alpha)>\pi$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma<2\pi$$

▨

※3 定理2から定理1を証明することも可能である．4点O，A，B，C が同一平面上にある場合だけを考えればよく，このときはO，A，B，C が同一平面上にないときの極限として得られる．

定理1を用いて解ける問題を何題か紹介したい．

問題1 空間に原点を始点とする長さ1のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ がある．$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を γ，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角を α，$\vec{c}$，$\vec{a}$ のなす角を β とするとき，次の関係が成立することを示せ．また，ここで等号の成立するのはどのような場合か．

$$0\leqq\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqq1$$

(H3 京大・理系)

(解答) ($0\leqq\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ は省略)

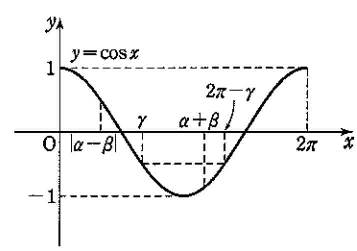
$$\begin{aligned}
&1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\\
&=1-\{(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2-\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta\}\\
&=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta-(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2\\
&=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)-(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2\\
&=\sin^2\alpha\sin^2\beta-(\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)^2\\
&=(\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)\times(\sin\alpha\sin\beta-\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)\\
&=-\{\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\}\{\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)\} \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

定理1から，1点Oに集まる角 α，β，γ について

$\alpha+\beta\geqq\gamma$，$\beta+\gamma\geqq\alpha$，$\gamma+\alpha\geqq\beta$，$\alpha+\beta+\gamma\leqq2\pi$

が成り立つから，

$$|\alpha-\beta|\leqq\gamma\leqq\alpha+\beta\leqq2\pi-\gamma$$



したがって

$$\cos(\alpha+\beta)\leqq\cos\gamma\leqq\cos|\alpha-\beta|=\cos(\alpha-\beta)$$

が成り立つから，①より

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqq1 \quad \cdots\cdots (**)$$

等号は $\gamma=|\alpha-\beta|$ または $\gamma=\alpha+\beta$ または $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ すなわち $\beta+\gamma=\alpha$ または $\gamma+\alpha=\beta$ または $\alpha+\beta=\gamma$ または $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ のとき成り

立つから，定理1により $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が同一平面上にある場合である． ▨

※4　定理1の証明のように

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(\cos\gamma,\ \sin\gamma,\ 0)$，

$\vec{c}=(s,\ t,\ u)$，$|\vec{c}|=1$

とおいて解いてもよい(詳細については次の類題1参照)．

問題1の解答で，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$0\leqq\gamma\leqq\pi$ のとき

$\beta+\gamma\geqq\pi$，$\gamma+\alpha\geqq\pi$，$\alpha+\beta+\gamma\leqq2\pi \Longrightarrow (**)$

を示したわけであるが，逆も成り立つ．

$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$0\leqq\gamma\leqq\pi$ で$(**)$が成り立つとすると，①より

$$\{\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\}\{\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)\}\leqq0$$

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta\geqq0$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)\leqq\cos\gamma\leqq\cos(\alpha-\beta)$$

$0\leqq\gamma\leqq\pi$，$0\leqq|\alpha-\beta|\leqq\pi$ で $\cos\gamma\leqq\cos|\alpha-\beta|$

$\cos x$ は $[0,\ \pi]$ で単調減少であるから　$\gamma\geqq|\alpha-\beta|$

$\therefore$　$\beta+\gamma\geqq\alpha$，$\gamma+\alpha\geqq\beta$

次に，$\cos(\alpha+\beta)\leqq\cos\gamma$ を考える．

$\alpha+\beta<\pi$ のときは $\alpha+\beta\geqq\gamma$ で

$$\alpha+\beta+\gamma<\pi+\gamma\leqq2\pi$$

$\alpha+\beta\geqq\pi$ のときは $\alpha+\beta\geqq\pi\geqq\gamma$ から　$\alpha+\beta\geqq\gamma$

また，$\pi\leqq\alpha+\beta\leqq2\pi$，$\pi\leqq2\pi-\gamma\leqq2\pi$ で

$$\cos(\alpha+\beta)\leqq\cos(2\pi-\gamma)$$

$\cos x$ は $[\pi,\ 2\pi]$ で単調増加であるから

$$\alpha+\beta\leqq2\pi-\gamma \qquad \therefore\ \alpha+\beta+\gamma\leqq2\pi$$

よって，次の系を得る．

系　$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$0\leqq\gamma\leqq\pi$　のとき

$\beta+\gamma\geqq\pi$，$\gamma+\alpha\geqq\pi$，$\alpha+\beta+\gamma\leqq2\pi \Longleftrightarrow$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqq1$

$(**)$

類題1　点Oを原点とする座標空間に3点A，B，Cをとり，4面体OABCの体積をVとする．OA$=a$，OB$=b$，OC$=c$，$\angle$BOC$=\alpha$，$\angle$COA$=\beta$，$\angle$AOB$=\gamma$ (ただし，$0<\alpha$，β，$\gamma<\pi$)とし，次の問いに答えよ．

(1)　A$=(a,\ 0,\ 0)$ でBが x-y 平面にあるものとして，Bの座標を求めよ．

(2)　(1)で更に C$=(s,\ t,\ u)$，$u>0$ とする．s，t，u を a，b，c，α，β，γ で表せ．

(3)　(1)，(2)より，Vを a，b，c，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ で表せ．

(4)　$V\leqq\dfrac{abc}{6}$ であることを示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか．

(H2　早大・理工)

※5　1985年に東京商船大学で類題が出題されている．問題1の解答あるいは定理1の証明の座標設定で，$\gamma=60°$ のときの不等式$(**)$がH12年京都大学で文系に出題されている．

類題2　$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(\cos60°,\ \sin60°,\ 0)$ とする．

(1)　長さ1の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し

$$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c},\ \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$$

とおく．このとき，次の不等式$(*)$が成り立つことを示せ．

$$(*)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　不等式$(*)$を満たす$(\alpha,\ \beta)$$(0°\leqq\alpha\leqq180°$，$0°\leqq\beta\leqq180°)$の範囲を図示せよ．

(H12　京大・文系)

※6　(2)は系で $\gamma=60°$ とおいた

$\beta+60°\geqq\alpha$，$60°+\alpha\geqq\beta$，$\alpha+\beta\geqq60°$，

$\alpha+\beta+60°\leqq360°$

$(0°\leqq\alpha\leqq180°$，$0°\leqq\beta\leqq180°)$を整理したものが α，β の範囲となる．

問題2　(1)　空間内の直線Lを共通の境界線とし，角θで交わる2つの半平面 H_1，H_2 がある．H_1 上に点A，L 上に点B，H_2 上に点Cがそれぞれ固定されている．ただし，A，CはL上にないものとする．半平面 H_1 を，L を軸として，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で回転させる．このとき，θ が増加すると $\angle$ABC も増加することを証明せよ．

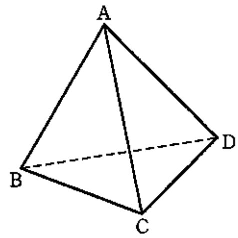
(2)　空間内の相異なる4点A，B，C，Dについて，不等式

$$\angle\text{ABC}+\angle\text{BCD}+\angle\text{CDA}+\angle\text{DAB}\leqq2\pi$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，角の単位はラジアンを用いる．　(H4　東大・後期)

(2)は定理１の(2)を用いて証明することができる(証明方法は定理２の(2)を証明する方法と同じである).

定理１の(2)をそれぞれ点A，Cに適用すると



$\angle DAB \leqq \angle DAC + \angle CAB$

$\angle BCD \leqq \angle BCA + \angle ACD$

が成り立つ．また，

$\angle ABC = \angle ABC$

$\angle CDA = \angle CDA$

が成り立つから，辺々加えると

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB$$
$$\leqq (\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB) + (\angle ACD + \angle CDA + \angle DAC) = 2\pi$$

よって

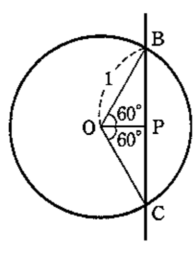
$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \leqq 2\pi$$

を得る．

> **問題３**　点Oを中心とする半径１の球面上に３点A，B，Cがある．線分BC，CA，ABの中点をそれぞれP，Q，Rとする．線分OP，OQ，ORのうち少なくとも１つの長さが$\frac{1}{2}$以上であることを証明せよ．
>
> (H５　京大・文系)

定理１の(3)を使うと次のように証明できる．

(解答)　$OP = \frac{1}{2}$ のとき



$\angle BOP = 60°$ であるから，

$OP < \frac{1}{2}$ のとき

$\angle BOC > 120°$ となる．

$OP < \frac{1}{2}$，$OQ < \frac{1}{2}$，$OR < \frac{1}{2}$

と仮定すると

$\angle BOC > 120°$，$\angle COA > 120°$，$\angle AOB > 120°$

$\therefore$　$\angle BOC + \angle COA + \angle AOB > 360°$

定理１より，１点Oに集まる角について

$$\angle BOC + \angle COA + \angle AOB \leqq 360°$$

が成り立つことに矛盾する．したがって，OP，OQ，ORのうち少なくとも１つの長さは$\frac{1}{2}$以上である．　▨

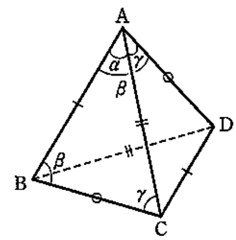
3. 等面四面体

四面体ABCDで AB＝CD，AC＝BD，AD＝BC のとき４つの面は合同である．この四面体を等面四面体という．

> **問題４**　四面体ABCDにおいて，AB＝CD，AC＝BD，AD＝BC が成立するならば，三角形ABCは鋭角三角形であることを証明せよ．
>
> (H１　名大)

定理２(1)を使うと，簡単に解けます．

定理２(1)から



$\alpha + \beta > \gamma$,

$\beta + \gamma > \alpha$,

$\gamma + \alpha > \beta$

また，$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ を使うと

$$180° - \gamma = \alpha + \beta > \gamma$$

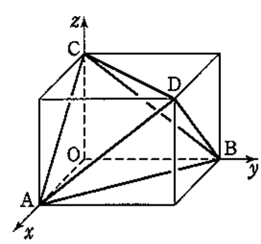
$\therefore$　$\gamma < 90°$

同様にして，$\alpha < 90°$，$\beta < 90°$ となるから，△ABCは鋭角三角形である．

逆に合同な４つの鋭角三角形を用いて，これらを４つの面とする四面体ができるだろうか？

> 等面四面体ABCDにおいて，４頂点A，B，C，Dは適当な直方体の４頂点となる．

(証明)　$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$A(x, 0, 0)$，$B(0, y, 0)$，$C(0, 0, z)$，$D(x, y, z)$ とおくと，



$x^2 + y^2 = c^2$　……①

$y^2 + z^2 = a^2$　……②

$z^2 + x^2 = b^2$　……③

①＋②＋③から

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

④−①，④−②，④−③から

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},\quad y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2},$$

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \quad \cdots\cdots (★)$$

△ABCは鋭角三角形であるから

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0,\quad c^2 + a^2 - b^2 > 0,\quad a^2 + b^2 - c^2 > 0$$

したがって，(★)すなわち①，②，③を満たす正の実数 x，y，z が存在する．　▨

※7　$a=b=c$ のとき $x=y=z=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ ととれるから，正四面体 ABCD は，4頂点 A，B，C，D が適当な立方体の4頂点となる．

※8　等面四面体の重心をGとすると，

$G\left(\dfrac{x}{2},\ \dfrac{y}{2},\ \dfrac{z}{2}\right)$ より，

$$GA=GB=GC=GD=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}$$

となり，重心Gは等面四面体の外心と一致する(H4年筑波大学の問題参照)．

等面四面体を直方体に埋めこんで考える方法は，H5年東京大・理系，H8年東京大・後期，H11年京都大・後期の問題で有効である．

類題3　すべての面が合同な四面体 ABCD がある．頂点 A，B，C はそれぞれ x，y，z 軸上の正の部分にあり，辺の長さは

$AB=2l-1$，$BC=2l$，$CA=2l+1$ $(l>2)$

である．四面体 ABCD の体積を $V(l)$ とするとき，次の極限値を求めよ．

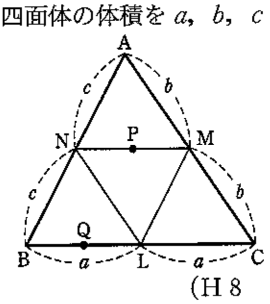
$$\lim_{l\to 2}\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$ (H5　東大・理系)

A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ とおき，a^2，b^2，c^2 を l で表して考えるとよい．

類題4　3辺の長さが $BC=2a$，$CA=2b$，$AB=2c$ である鋭角三角形△ABC の3辺 BC，CA，AB の中点を L，M，N とする．線分 LM，MN，NL に沿って三角形を折り曲げ，四面体をつくる．その際，線分 BL と CL，CM と AM，AN と BN はそれぞれ同一視されて，長さが a，b，c の辺になるものとする．

(1)　線分 MN，BL の中点をそれぞれ P，Q とする．四面体を組み立てたとき，空間内の線分 PQ の長さを求めよ．

(2)　この四面体の体積を a，b，c で表せ．



(H8　東大・後期)

A$(x,\ 0,\ 0)$，L$(0,\ y,\ 0)$，M$(0,\ 0,\ z)$ とおいて考えるとよい．

※9　各辺の長さが $2a$，$2b$，$2c$ の鋭角三角形の各辺の中点を結ぶ3つの線分で折りまげて等面四面体が作れることになる(1984年岐阜大学の問題も参照)．

類題5　△ABC は鋭角三角形とする．このとき，各面がすべて △ABC と合同な四面体が存在することを示せ．（H11　京大・理系・後期）

次の類題6の方が類題5より難しい．

類題6　合同な4つの三角形を用いて，これらを4つの面とする四面体(三角すい)をつくりたい．三角形の3辺を a，b，c $(a\geqq b\geqq c)$ とするとき，四面体をつくることができるための必要十分条件を求めよ．

(1968　大阪大)

(栃木県立栃木高等学校)