# $A^n$ の公式の統一について

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

## § 1. はじめに

2次正方行列の $n$ 乗を求めるとき，固有方程式が重解をもつときは別扱いとなりますが，本稿では，極限を使って，結果の式を統一解釈できることを示します．

## § 2. 公式の確認

ここでは，念のため，よく知られている $A^n$ の求め方を確認します．

単位行列を $E$，零行列を $O$ とします．

[i]　$A$ が異なる2つの固有値 $\alpha$，$\beta$ をもつとき

Hamilton―Cayley の定理より

$$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$$

これは，$A(A-\alpha E)=\beta(A-\alpha E)$ と変形できるので

$$A^n(A-\alpha E)=\beta^n(A-\alpha E)$$

同様にして　$A^n(A-\beta E)=\alpha^n(A-\beta E)$

2式の辺々を引いて

$$(\beta-\alpha)A^n=(\beta^n-\alpha^n)A-(\alpha\beta^n-\beta\alpha^n)E$$

$$A^n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}A-\frac{\beta^n\alpha-\beta\alpha^n}{\beta-\alpha}E \qquad (2.1)$$

$A^n$ は $A$ の一次式で表されたわけです．

[ii]　$A$ が固有値 $\alpha$（重解）をもつとき

Hamilton―Cayley の定理より

$$(A-\alpha E)^2=O$$

このとき，$K=A-\alpha E$ とおくと $K^2=O$ を利用して

$$\begin{aligned}A^n&=(K+\alpha E)^n\\&=n\alpha^{n-1}K+\alpha^nE\\&=n\alpha^{n-1}(A-\alpha E)+\alpha^nE\\&=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE \qquad (2.2)\end{aligned}$$

この場合も，$A^n$ は $A$ の一次式で表されたわけです．

## § 3. 公式の統一

ここでは，極限を使って，2つの公式 (2.1)，(2.2) が統一できることを示します．

(2.1) の $A$ の係数について

$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}=n\alpha^{n-1}$$

（$(x^n)'=nx^{n-1}$ に注意）

また，(2.1) の $-E$ の係数について

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\beta^n\alpha-\beta\alpha^n}{\beta-\alpha}&=\lim_{\beta\to\alpha}\beta\alpha\frac{\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}\\&=\alpha^2(n-1)\alpha^{n-2}\\&=(n-1)\alpha^n\end{aligned}$$

となって，(2.2) と一致します．

すなわち，重解の場合の公式 (2.2) は，公式 (2.1) で $\beta\to\alpha$ とすれば得られることが示されたわけです．

《参　考　文　献》


[1]　石濱文武，行列のべきの求め方，数学セミナー（日本評論社），1979年6月号，p.106

[2]　石濱文武，3次正方行列のべきの求め方，数学セミナー，1984年12月号，p.106

[3]　石濱文武，2×2 行列の $n$ 乗の簡単な求め方，日本数学教育学会誌，71巻11号，1989，p.24-26


（神奈川県立湘南高等学校）