京大入試と超関数

遠藤（えんどう） 一成（かずなり）

1 はじめに

2000年度京都大学前期入学試験では，現代数学に直結する内容を背景にもつ問題が理系5として出題された．

その背景とは，物理学者 Dirac が考えたデルタ関数 δ であり，すべての連続関数 φ について

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\varphi(x)\,dx=\varphi(a)$$

が成り立つという性質をもつ．ただし，この公式を満たす普通の意味での関数 $\delta(x-a)$ は存在しない．そこで，Schwartz は超関数の理論として，この架空の関数に合理的な解釈を与え体系化した．

本稿では，京都5を一般化して，関数列 $\{(n+1)x^n\}$ が $\delta(x-1)$ に収束することを，以下2通りの方法で証明することを目的とする．

(1) Riemann 積分の範囲で ε-δ 論法を用いる．

(2) Lebesgue 積分の範囲に広げて考え，項別積分定理を利用する．

2 京都5

京都大学5を考えよう．

> **京都5** 数列 $\{c_n\}$ を次の式で定める．
>
> $$c_n=(n+1)\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
>
> このとき
>
> (1) c_n と c_{n+2} の関係を求めよ．
>
> (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$ を求めよ．　(3) 省略

解）(1) 部分積分法より

$$c_n=\Big[x^{n+1}\cos\pi x\Big]_0^1+\pi\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx$$

$$=-1+\frac{\pi}{n+2}\left\{\Big[x^{n+2}\sin\pi x\Big]_0^1-\pi\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx\right\}$$

よって　$c_n=-1-\dfrac{\pi^2 c_{n+2}}{(n+2)(n+3)}$

(2) (1)より $c_n=-1+\pi\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx$ なので

$$|c_n+1|=\left|\pi\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx\right|$$

$$\leqq\pi\int_0^1 x^{n+1}\,dx=\frac{\pi}{n+2}$$

従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n+2}=0$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=-1$ である．

さて，

$\varphi(x)=\cos\pi x$,

$$K_n(x)=\begin{cases}(n+1)x^n & 0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}\\ 0 & x<0 \text{ または } x>1 \text{ のとき}\end{cases}$$

とおくと，

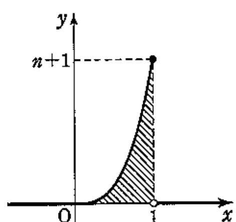
$$c_n=\int_{-\infty}^{+\infty}K_n(x)\varphi(x)\,dx$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x)\varphi(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}c_n=-1=\varphi(1)$$

が成り立つ．従って，極限と積分の順序が交換できるとすれば，関数列 $\{K_n(x)\}$ の極限は $\delta(x-1)$ であることを暗示している．

関数列 $\{K_n(x)\}$ の性質をまとめておこう．

> **性質** (1) すべての自然数 n と実数 x に対して
>
> $$K_n(x)\geqq 0$$
>
> (2) すべての自然数 n に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}K_n(x)\,dx=1$
>
> (3) 任意の正の数 ε と $0<\delta<1$ を満たす任意の δ に対し，次の条件を満たす自然数 N が存在する．
> N より大きなすべての自然数 n に対して
>
> 
>
>
> $$\int_{-\infty}^{1-\delta}K_n(x)\,dx+\int_1^{+\infty}K_n(x)\,dx<\varepsilon$$
>
> が成り立つ．
>
> (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}K_n(x)=\begin{cases}+\infty & x=1 \text{ のとき}\\ 0 & x\neq 1 \text{ のとき}\end{cases}$

性質(2)は，$y=K_n(x)$，x 軸，$x=1$ で囲まれた部分の面積は，n に関わらず常に 1 であり，性質(3)はこの面積が，n が無限大になるとき，直線 $x=1$ の左側に集中することを意味している．

(3)の証明　$0<1-\delta<1$ なので，自然数 N を $(1-\delta)^{N+1}<\varepsilon$ となるよう定める．このとき，N より大きい任意の自然数 n に対して

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{1-\delta}K_n(x)\,dx+\int_1^{+\infty}K_n(x)\,dx&=\int_0^{1-\delta}(n+1)x^n dx\\&=(1-\delta)^{n+1}\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

(4)　$0<x<1$ の場合だけ証明すればよい．

このとき，$x=\dfrac{1}{1+r}$ となる正の数 r が存在する．

そして，$n\geqq 2$ のとき，

$$x^n=\frac{1}{(1+r)^n}\leqq\frac{1}{1+nr+\dfrac{n(n-1)}{2}r^2}$$

よって　　$0<(n+1)x^n\leqq\dfrac{n+1}{1+nr+\dfrac{n(n-1)r^2}{2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}$(右辺)$=0$ なので，$0<x<1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}K_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)x^n=0$ である．

3 Riemann 積分の範囲で ε-δ 論法による証明

京都5の一般化をしよう．

> **定理**　$\varphi(t)$ が連続関数のとき
>
> (1)　$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\displaystyle\int_0^1 t^n\varphi(t)\,dt=\varphi(1)$
>
> (2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t-x)\varphi(t)\,dt=\varphi(x+1)$
>
> が成立する．

(2)の証明は，$t-x=u$ とおくと，$dt=du$ なので

$$\text{左辺}=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_n(u)\varphi(u+x)\,du$$

$K_n(u)$ の定義より

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 t^n\varphi(u+x)\,du$$

(1)より

$$=\varphi(x+1)$$

従って，以下(1)だけを ε-δ 論法を用いて証明する．

(1)の証明

$\varphi(t)$ の連続性より，任意の正の数 ε に対して，$0<\delta<1$ となる δ が存在して，$1-\delta\leqq t\leqq 1$ を満たすすべての t に対して

$$|\varphi(t)-\varphi(1)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．そこで

$$\left|(n+1)\int_0^1 t^n\varphi(t)\,dt-\varphi(1)\right|$$

性質(2)より

$$\begin{aligned}&=\left|(n+1)\int_0^1 t^n\{\varphi(t)-\varphi(1)\}\,dt\right|\\&\leqq(n+1)\int_0^1 t^n|\varphi(t)-\varphi(1)|\,dt\\&=(n+1)\int_0^{1-\delta}t^n|\varphi(t)-\varphi(1)|\,dt\\&\quad+(n+1)\int_{1-\delta}^1 t^n|\varphi(t)-\varphi(1)|\,dt\end{aligned}$$

ここで，最大値原理より，$\displaystyle\operatorname*{Max}_{0\leqq t\leqq 1-\delta}|\varphi(t)-\varphi(1)|=A$ とおくことができるから

$$\begin{aligned}&\leqq A(n+1)\int_0^{1-\delta}t^n dt+\frac{\varepsilon(n+1)}{2}\int_{1-\delta}^1 t^n dt\\&=A(1-\delta)^{n+1}+\frac{\varepsilon\{1-(1-\delta)^{n+1}\}}{2}\end{aligned}$$

自然数 N を，$n\geqq N$ を満たす任意の自然数 n に対して，$(1-\delta)^{n+1}A<\dfrac{\varepsilon}{2}$ となるようにとる．

このとき，N より大きい任意の n に対して

$$\begin{aligned}&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

以上より，$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\displaystyle\int_0^1 t^n\varphi(t)\,dt=\varphi(1)$ が成り立つ．

4 Lebesgue の項別積分定理による証明

> **定理**　(Lebesgue)　関数列 $\{f_n(t)\}$ に対して関数 $g(x)$ が存在して $|f_n(x)|\leqq g(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ かつ $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx<+\infty$ を満たすとき，極限と積分の順序を取りかえることができる．
>
> つまり
>
> $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt=\int_0^1\left\{\lim_{n\to\infty}f_n(t)\right\}dt$$

この項別積分定理を利用して京都5を証明しよう．

証明　$t^n=x$ とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=nt^{n-1}$ より

$$\begin{aligned}(1)\text{の左辺}&=\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 t^n\varphi(x^{\frac{1}{n}})\frac{dx}{nt^{n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}}\varphi(x^{\frac{1}{n}})\,dx\end{aligned}$$

最大値原理より　$\underset{0\leqq t\leqq 1}{\mathrm{Max}}|\varphi(t)|=K$ とおくことができる。

また

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}}\varphi(x^{\frac{1}{n}})\right|\leqq 2K \text{ かつ } \int_0^1 2K\,dx<+\infty$$

が成り立つ。よって Lebesgue の項別積分定理より

$$=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}}\varphi(x^{\frac{1}{n}})\,dx$$

$$=\int_0^1\varphi(1)\,dx$$

$$=\varphi(1)$$

以上より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 t^n\varphi(t)\,dt=\varphi(1)$ が成り立つ。

5 おわりに

東京女子大学で出題された次の問題中の関数列 $\{f_n(t)\}$ は $\delta(t)$ に収束する。

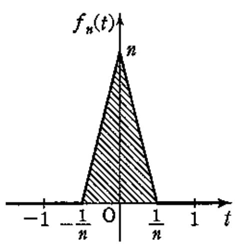
> **東京女子大**
> 関数 $f_n(t)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は，
>
> $-\dfrac{1}{n}\leqq t<0$ のとき　$n^2\left(t+\dfrac{1}{n}\right)$，
>
> $0\leqq t<\dfrac{1}{n}$ のとき　$-n^2\left(t-\dfrac{1}{n}\right)$，
>
> $|t|>\dfrac{1}{n}$ のとき　0
>
> を値にもつものとする。
> このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(t)\cos t\,dt$ を求めよ。

つまり，次の定理が成立する。

> **定理**　任意の連続関数 $\varphi(t)$ に対して
>
> (1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 f_n(t)\varphi(t)\,dt=\varphi(0)$
>
> (2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t-x)\varphi(t)\,dt=\varphi(x)$
>
> が成り立つ。

京都5と同じように Lebesgue の項別積分定理により証明できるが，詳細は省略する。

注意 1） $\{f_n(t)\}$ は，n が大きくなると，右図のように囲まれる部分の面積は常に 1 であるが，直線 $t=0$ に集中する。



注意 2） 関数列 $\{D_n(t)\}$ が，次の 3 条件

(1)　任意の自然数 n と実数 t に対して $D_n(t)\geqq 0$

(2)　任意の自然数 n に対して　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}D_n(t)\,dt=1$

(3)　任意の正の数 ε と正の数 δ に対して，次の条件を満たす自然数Nが存在して，N より大きい任意の自然数 n に対して

$$\int_{-\infty}^{-\delta}D_n(t)\,dt+\int_{\delta}^{\infty}D_n(t)\,dt<\varepsilon$$

が成り立つ。

を満たすとき，Dirac 列と呼ばれ，その極限はデルタ関数 $\delta(t)$ であることが知られている。

《参　考　文　献》

S. Lang　Analysis I (1974，Addison-Wesley)

（愛知県　滝高等学校）