第11回日本数学コンクール

大沢　健夫

1. 日本数学コンクールの新たな挑戦

昨年度の日本数学コンクールの受賞式で，何人かの出席者にコンクールへの要望を聞くことができた．ホームページを充実させてほしいという，当然かつ当事者にとっては耳の痛い話の他に，学校どうしの対抗試合のようにチームプレイの要素をとり入れてはどうかという意見や，問題を解くだけでなく，作る要素も加えてほしいなど，面白い意見があり，考えさせられた．その結果，週末や夏休みなどのまとまった時間を利用して，一つのテーマにもっと本格的に取り組んでもらい，その結果を論文形式にまとめたものを募集してはどうかという案が浮上した．日本数学コンクール論文賞である．

「日本数学コンクール」は明日の現代社会を担う知性豊かな人材の育成を趣旨としている．このため平成2年(1990年)から「日本数学コンクール」，同9年(1997年)から更に「日本ジュニア数学コンクール」を開催し，今日一定の社会的評価を受けるに至った．コンクールの問題作成に多大な貢献をされた四方義啓氏が3年前名古屋大学を退官されて以来，実施にあたっては名古屋大学を中心とする大学の教官や高校教師等で構成する「日本数学コンクール委員会」がこれを引き継ぎ，関係教育委員会や報道機関，数学研究団体などの後援，協力を得てきた．

コンクール論文賞の創設にあたっては，筆者の提案をもとに，会長の伊藤正之氏(名古屋大学情報文化学部教授)を中心に検討が重ねられ，昨年度の運営委員会での趣意書の提出をへて，今年度の総会で正式に発足が認められた．これは今にして思えば拙速であって，本来ならばあと一年の検討期間を設けることにより，委員会内部での議論をつくすべきことであった．しかしこう感じるのは，とにかく論文賞というものをつくってみて，無い知恵をしぼって二つのテーマを提出して応募作を待った結果，今までのコンクールの入賞者と同等以上のレベルで評価できる応募作がいくつか集まったことによる．この試みは今年度は何とか成功した．だから来年以降も続けていきたい．そう思った時，勝手に先走り過ぎたのではという反省がある．

いずれにせよ今年度の日本数学コンクールには論文賞という新しい要素が加わったので，今回はコンクールの問題に先立って，論文賞のテーマと応募作の内容について紹介させて頂きたい．

2. 論文賞のテーマについて

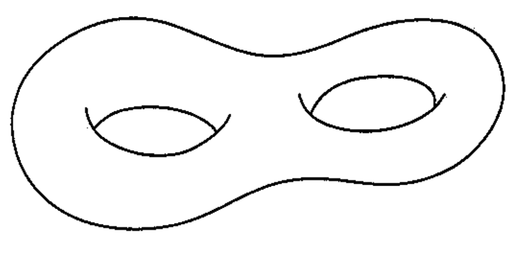
若者の頭脳は軽快である．反面，熱し易く冷め易い．そういう人たちの興味をそそり，かつ一定期間集中して考えさせられるテーマを見つけることは難しそうに思われる．従って，次に述べる論文テーマを提出した時はあてのない旅に出るような思いであった．

論文賞テーマ1(宇宙の人口密度)

一つの国の人口密度とは，その国の住民の数を面積で割ったものとして定義されますが，宇宙のように無限に広がった空間に無限個の点が散在しているとしたとき，それらの点の密度はどう定義したらよいでしょう．そのような密度を定義し，その基本的な性質を述べ，できればどのような応用が考えられるかについて論じて下さい．

論文賞テーマ2(不思議な星の世界地図)

二つ穴のあいたドーナツのような奇妙な星があったとします(下図参照)．



あなたがもしこの星の世界地図を作る仕事を頼まれたらどんな地図をどんな方法で作りますか.

この二つのテーマを，数学コンクール参加募集要項の発表と同時に，ポスターや中日新聞を通じて発表し，〆切日まで約3ヶ月の間応募作を待った．その結果，フタを開けてみれば両テーマをあわせて約100通の応募があり，その中には三重県伊勢市にある皇學館中学校一年の二クラス分の作品もあった．受け持ちの教諭であられる林浩司氏(29才)によると，授業時間を3回使って全員の生徒に書かせたとか．まことに有難いことであった．

応募作の全体的な傾向であるが，テーマ1に取り組んだ作品は約1割で，テーマ2に片寄ってしまった．実はプロの数学者の間ではテーマ1が良い問題だと評価され，テーマ2は，意味がとりにくいのでもっと問題を単純化するべきだという意見が多かったので，この結果は意外だった．しかし最近になって，何人かの人たちとの会話の結果，数直線内の整数点の集合の‘人口密度’が1であることが，数学の専門家以外にはまったく自明でないことがわかり納得した．密度の概念はいろんな意味で重要なので，出し方を工夫して再挑戦してみたい．

テーマ2であるが，解決を要求していることは二つある．すなわち二つ穴のドーナツの表面を切り開いて平面内の領域に変形することと，その平面領域内に何らかの形で地図の用をなす図形を書きこむことである．もちろんこれを完全に実現することは，地球上の地図の場合と違って数学的にも複雑になり，困難である．とはいえその困難は技術的なものにすぎず，原理的にはケーベ(P.Koebe)の一意化定理というものによって，メルカトル図法と同様の地図の存在が保証されている．そこへの糸口を発見することがこのテーマにおける課題であった．金賞論文の滝俊一君はみごとにそれに答えてくれた．

3. 今年度のコンクール問題

第一問はジュニア部門との共通問題であり，微積分の知識が無くても答案が書けるように設問を工夫しなければならない．とはいえ数学コンクールの趣旨は(都合良く出来ていて)解答の完全さを競うことにあるのではなく，そこへの糸口を発見するためにいろんな発想を出し合うことにある．という訳で今回はいかにも古典的な微積分の話題である懸垂線がテーマになった．もちろんこの問題では微分方程式を立てて懸垂線の方程式を求めることを要求せず，アーチ型の石組みと首飾りの形が似ている理由について考えてもらうのがねらいである．ここまで問題を平易にしてしまうと数学らしさが薄れるのだが，現実に存在するさまざまな力の要素がどのような関係にあるときに均衡が実現されあるいは破れるかということは，日常的な問題でもあり，数学への導入として適当であると考えた．(その意味では最近の政界の茶番劇の方が教訓的かもしれないが)．アーチ型は単にその一例である．コンクール当日は，名古屋大学共通教育棟と三重県立津高校の会場各教室に発泡スチロールのブロックで作ったアーチ型を配備し，参加者全員が実際にスチロール製アーチを立ててみることができるようにした．その結果，参加者全体の約一割が，力のつりあいがこの場合，重力と抗力，あるいは重力と張力によるものであり，アーチ型と首飾りの形が同じになる理由はそこに帰着されることを理解したようである．

ちなみに今回のコンクール参加者数は，高校生が200名弱と低調であった．この数を最盛期の数に近づけたいが，そのためには実施側の数学と関連諸科学に関する知識量を飛躍的に増やすことが基本的に重要であると考えている．囲碁や将棋の世界もそうだが，アマとプロの差が大きいほどその世界の奥行きと魅力は増大すると思う．しかしこれは小手先のワザで解決できる問題ではなく，当事者として頭の痛いところである．

第二問はいわゆる調和解析で有名なウィーナー(N Wiener)の補題から迂余曲折をへて作られた問題であり，中間段階ではそれこそ曲がりくねった道に沿って携帯電話の基地局を作る効率的な方法を問おうというものだったが，結局問題委員会で，高校側から答をはっきり数字で出せる形にしてほしいという要望があり，非常に単純化された状況に落ち着いた．しかしながら，昨年度の大賞受賞者である武藤勇太君はさすがにこの手の問題が得意らしく，現象の数学的本質を洞察する見事な答案を書いてくれた．

第三問はいわゆるバックミンスター・フラーレンという，大型炭素分子 C_{60} の形状がサッカーボールの模様とぴったり同じであることから，C_{24} が存在したとしたらどんな形になるのか推理してみようと

いうものである．これは化学の専門家たちから不評を被ったが(原子間結合力から実際には不可能らしい)，解答は実に多様でそれぞれ創意に富んでおり，参加者からの評判は悪くなかった．今回はこれがもっとも日本数学コンクールらしい問題だったようである．

ちなみに筆者は3月現在，この問題を素材にした20分ビデオの製作にかかわっており，悪戦苦闘中である．

繰り返しになるが，日本数学コンクールの実施にあたっては，各方面から継続的に御支援を頂いている．紙面をお借りして深く感謝の意を表したい．

(名古屋大学　多元数理科学研究科)

問題1 (アーチと首かざり)

地震の多い日本ではあまり見かけませんが，ヨーロッパに行きますと，どんな小さな町でも，古い石造りの建物がよく見られます．皆さんも，写真や映画で見たことがありませんか．何百年も前に建てられた教会や市役所，劇場やオペラハウスなどです．大地震さえなければ，日本でもあちこちに古くて立派な建物が残っているはずですが残念ですね．

ところで，そのような石造りの建物によく見られるのがアーチ型の石組みです．じょうずにつくったアーチ型は見た目に美しいだけでなく，積まれた石のバランスが大変よく，建物が安定することがわかっています．

皆さんの教室にあるハッポースチロールでできたアーチ型の模型を見たり，触れたりして，安定なアーチ型に共通の性質を調べてみましょう．

アーチ型は人工的なものと思われるかもしれませんね．でも，ヒモや首かざりなどの両端を持ってぶらさげてみたらどんな形になるのでしょうか．アーチ型をさかさまにしたような形になりませんか．

雨あがりの空にかかる虹もアーチ型をしていますが，首かざりの形と虹の形は同じアーチ型といっても少し違う所があるようです．

安定なアーチ型の石組みは，首かざりの形のほうによく似ています．これはなぜでしょうか．その理由を説明してください．

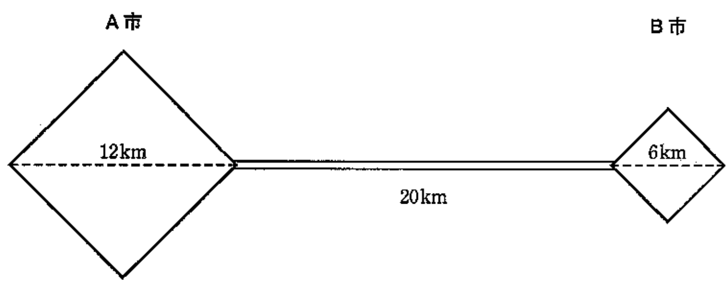
問題 2 （携帯電話基地局）

ここ1～2年の携帯電話の普及は凄まじいですね．皆さんのなかにも，携帯電話を使っている人がいるでしょう．皆さん，携帯電話の仕組みを知っていますか．携帯電話は，基地局と電波で結ぶ1種の無線機と考えればいいでしょう．だから，基地局のない所では，携帯電話は何の役にも立ちません．街で注意していますと，あちこちに沢山の基地局のアンテナを見つけることができます．それというのも，基地局の電波は大変弱く，せいぜい数キロしか届かず，また電波の届く距離が数10メートルのものもあるほどだからです．また，皆さん，基地局の性能（電波の届く距離）とその基地局の建設費や維持費との関係はどのように想像しますか．実は，基地局の建設費とその後の維持費を合わせたものは，その基地局の電波の届く距離の3/2乗に比例するとしてよいそうです．

いま，20km離れてA市とB市があり，両市の間には，幅20mの直線道路があります．A市とB市では，維持費も含めて出来るだけ安価に基地局を建設して，この両市と道路に沿った地域で，携帯電話が使えるようにしたいと考えています．この建設をめぐって，C業者とD業者が競争しています．C業者は，電波の届く距離が30mから3kmまでの全ての性能の基地局を作ることができ，D業者は，電波の届く距離が60mから6kmまでの全ての性能の基地局を作ることができます．A市とB市では，建設費とその後の維持費を合わせて，できるだけ安価に基地局の建設をしたいと考えています．皆さん，A市とB市の担当者になったつもりで，どちらの業者を選んだらよいかを数学的に考えて下さい．

まず，手始めに，A市，B市は，それぞれ対角線の長さが12km，6kmの正方形で，下図のような配置になっている場合，業者を決めて，その理由を説明して下さい．

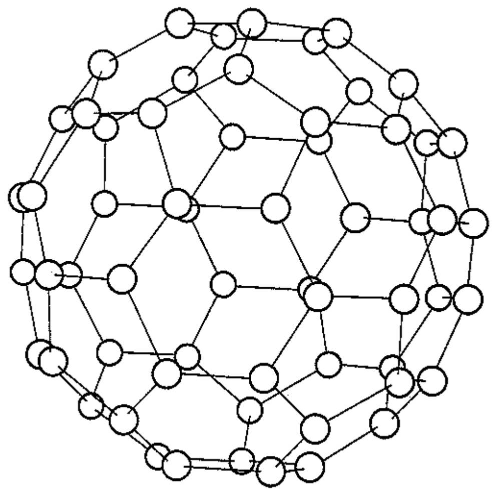
次に，A市，B市がともに正方形というのは本当に特殊な場合ですから，A市，B市がどのような形であれば，業者を決めることができるでしょうか，数学的に説明して下さい．



問題3 （サッカーボール）

バックミンスター・フラーレンという名前のついた，サッカーボールに似た炭素分子があることを皆さんは知っていますか．

この分子は60個の炭素原子が右の図のようにつながりあってできていて，ちょうどサッカーボールの表面の模様と同じように配置された五角形と六角形の頂点に炭素原子がついています（ちなみにこの分子の存在をはじめて予言したのは愛知県の大学の先生でした）．



質量が炭素原子の60倍であるような炭素分子の形を予測するのは，サッカーボールを知らなければきっと難しいに違いありません．実験室でこの分子をいじって楽しむことは，いろいろな事情でできないので，頭の中でこれに似たものを作って楽しんでみませんか．

そこで問題ですが，もし仮に24個分の炭素原子の重さをもつ炭素分子が発見されたとしてみます（実際にはそんな発見の報告はないのですが，将来このようなものが見つからないとは言い切れないでしょう）．このとき，この炭素分子の形を予測して図に描いてみて下さい．

バレーボールや野球のボールがヒントになるかもしれません．ビーチボールはあまり参考にならないでしょう．