$x_1x+y_1y=r^2$ と反転について

遠藤一成（えんどうかずなり），内藤弘嗣（ないとうひろつぐ）

1 はじめに

直線 $L：x_1x+y_1y=r^2$ は，点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，円 $C：x^2+y^2=r^2$ が与えられているとき，

(1) 点Aが円 C 上にあるとき，点Aにおける接線を表す．(図1)

(2) 点Aが円 C の外部にあるとき，点Aから円 C に引いた2本の接線の接点を通る直線であり，極線と呼ばれている．(図2)

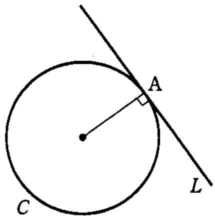


図1

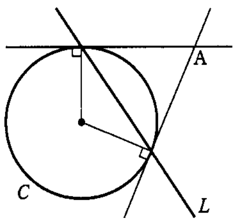


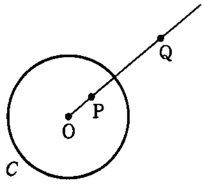
図2

さて，点Aが円 C の内部にあるとき，直線 L はどのような図形的意味があるのか考えているうちに，次の結論に達した．

> **性質1**　原点Oと点Aを直径とする円を K とする．この円 K の円 C に関する反転 $w=\dfrac{r^2}{\bar{z}}$ が直線 $L：x_1x+y_1y=r^2$ である．

2 反転

原点Oを中心とする半径 r の円を C とする．Oと異なる点Pに対して，Oを端点とする半直線OP上に点Qをとり，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ とする．このとき，PとQは円 C に関して反転の位置にあるという．



> **性質2**　原点Oを中心とする円 C に関する反転により
>
> (1) Oを通る直線は，自分自身になる．
>
> (2) Oを通らない直線は，Oを通る円になる．
>
> (3) Oを通る円は，Oを通らない直線になる．
>
> (4) Oを通らない円は，Oを通らない円になる．

(3)の証明

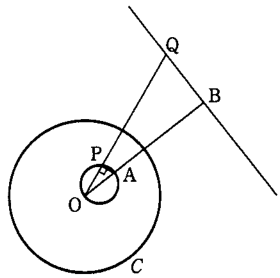
Oと円の中心を通る半直線とこの円の交点をA，円上の任意の点をPとして，A，Pの反転をそれぞれB，Qとする．

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$$
$$=r^2$$

なので $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}}$

よって

$$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{OQB}$$



また，$\angle\mathrm{OPA}=90^\circ$ なので $\angle\mathrm{OBQ}=90^\circ$ である．

したがって，OA を直径とする円は，点Aの反転Bを通り OA に垂直な直線にうつる．

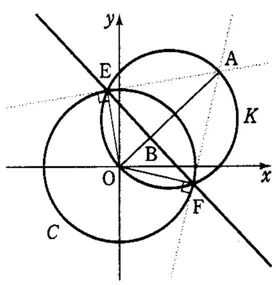
(3)の証明を逆向きに考えれば(2)が得られる．

> **系1**　線分 OA を直径とする円 K の円 C に関する反転は
>
> (1) 点Aが円 C 上にあるとき，Aにおける円 C の接線である．
>
> (2) 点Aが円 C の外部にあるとき，極線である．

性質2(3)の証明より(1)は明らか．

(2)の証明

円 K と円 C の交点をE，Fとする．2点E，Fの反転は，それぞれE，Fなので，性質2(3)より，円 K の反転は直線 EF である．また，OA と EF の交点をBとすれば点BはAの反転で



である．

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\mathrm{OE}^2=r^2$$

よって　$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}}=\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OB}}$

∠AOE は共通なので　△OAE∽△OEB

したがって，∠OEA＝∠OBE＝90° なので，直線 AE は，円Cの接線であり，Eは接点である．同様にFも接点なので円Kの反転は極線である．

3　複素数平面上での反転

複素数平面上で，点 P(z) と Q(w) は円Cに関して反転の位置にあるとき，定義より $k>0$ として

$$w=kz \quad \cdots\cdots ①$$

$$|z|\cdot|w|=r^2 \quad \cdots\cdots ②$$

が成立する．そこで①を②に代入すれば

$$|z|\cdot|kz|=r^2$$

よって　$k=\dfrac{r^2}{|z|^2}=\dfrac{r^2}{z\bar{z}}$

①に代入すると

$$w=\frac{r^2}{z\bar{z}}\times z=\frac{r^2}{\bar{z}} \quad \cdots\cdots ③$$

である．

複素数 x_1+iy_1 で点Aを表すとき，その反転Bを表す複素数は，③より

$$w=\frac{r^2}{x_1+iy_1}=\frac{r^2(x_1+iy_1)}{x_1{}^2+y_1{}^2}$$

また，性質 2(3)の証明より，OA を直径とする円Kの反転は，Bを通り OA に垂直な直線なので，その方程式は

$$x_1\left(x-\frac{r^2x_1}{x_1{}^2+y_1{}^2}\right)+y_1\left(y-\frac{r^2y_1}{x_1{}^2+y_1{}^2}\right)=0$$

したがって　$x_1x+y_1y=\dfrac{r^2(x_1{}^2+y_1{}^2)}{x_1{}^2+y_1{}^2}=r^2$

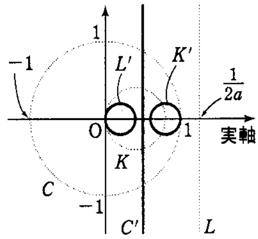
これは直線Lなので，性質1を証明したことになる．

4　円 C の役割

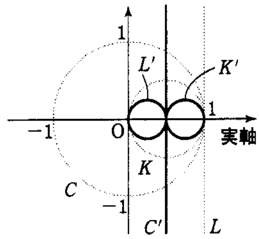
反転を決定する円Cの一性質を，この問題を用いて紹介しよう．簡単のために，点Aは実軸上の点 $2a$ (ただし $a>0$)，円Cの半径は1，つまり $|z|=1$ とする．このとき，円Cに関する反転は $w=\dfrac{1}{\bar{z}}$ で与えられる．OA を直径とする円をK，直線 $x=\dfrac{1}{2a}$をLとする．

性質3　一次分数変換 $w=\dfrac{1}{z+1}$ により円C，円K，直線Lを移すときの像をそれぞれ C'，K'，L' とする．このとき C' は直線，K'，L' は円であり，K' と L' は直線 C' に関して対称である．

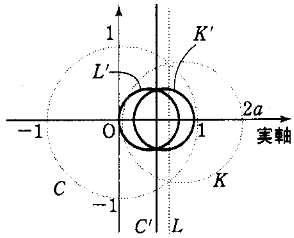
(ア)　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき



(イ)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき



(ウ)　$a>\dfrac{1}{2}$ のとき



証明

性質 2(3)より，点 −1 を中心とする反転 $w=\dfrac{1}{\overline{z+1}}$ により円Cは直線 $x=\dfrac{1}{2}$ にうつるので，更に実軸に関して折り返した変換 $w=\dfrac{1}{z+1}$ によっても同じ直線にうつる．したがって，C' は直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である．

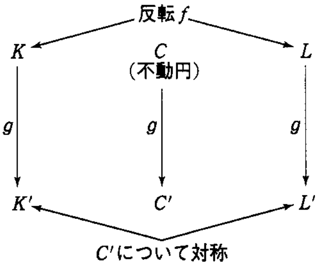
$$f(z)=\frac{1}{\bar{z}},\qquad g(z)=\frac{1}{z+1}$$

とおく．円K上の任意の点を表す複素数を z_0 とすれば，$g(z_0)$，$(gf)(z_0)$ はそれぞれ K'，L' 上の点である．そして

$$\begin{aligned}\frac{g(z_0)+(gf)(z_0)}{2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_0+1}+\frac{1}{\frac{1}{\bar{z}_0}+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_0+1}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_0+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{z_0+1}-\left(\overline{\frac{1}{z_0+1}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}+\mathrm{Im}(g(z_0))\end{aligned}$$

これは，K' と L' が $x=\dfrac{1}{2}$，つまり L' に関して対称であることを示している．

ダイアグラムで示すと次のようになる．



（愛知県滝高等学校）