オイラー級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ に関連して

宇都宮（うつのみや） 潔（きよし）

数研通信 No.35 に愛知県滝高等学校の遠藤一成先生が寄せられた「πの近似について」と題する一文を興味深く読んだ．それをきっかけにいろいろ考えているうちに，時が過ぎ，今年も恒例の「某予備校の入試研究会」を迎えた．そのとき聴いたことなどを含め，頂いた資料を参考にして，まとめてみた．

1．99 年度入試問題より

問題 1　$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し，

$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f_n(0)=n$ で与えられる関数の列 $\{f_n(x)\}$ と $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)dx$ からなる数列 $\{I_n\}$ とがある．

(1)　$f_n(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

(2)　$I_{n+1}-I_{n-1}$ を n の式で表せ．

(3)　$S_m=\sum_{k=1}^{m}\dfrac{(-1)^k}{2k-1}$ とするとき，I_n を S_m を用いて表せ．

[99 千葉大・前期]

問題 2　(1)　n を正の整数とする．$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin nx}{\sin x} & -\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2},\ x\neq 0\\ c_n & x=0\end{cases}$$

とおくことにより定義される関数 $f_n(x)$ が，連続関数となるように定数 c_n の値を定めよ．

(2)　$f_3(x)$ は $\cos x$，$\cos 2x$ 等を用いて表せることを示し，定積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_3(x)dx$ の値を求めよ．

(3)　任意の正の整数 n に対して，定積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_{2n+1}(x)dx$ の値を求めよ．

[99 東京大・理 I・後期]

いずれも良く練られた問題である．「無限乗積」は「高等学校の指導要領の範囲外」なので，出題されていないが，「代数学の基本定理の証明」が 7 年ほど前，山口大学で出題されている．今後，その観点からの「出題」がされることがあるのかもしれない．それは，型どおりに「極限操作」を前提とするかもしれないし，左のように，「定積分」の問題として出題されるのかもしれない（これらは，4. の「公式(1)」を意識した「変形」を前提とする「定積分の問題」として，出題されている）．千葉大の問題の(2)番は，いわば，東大の問題の(3)番に当たり，誘導がついている分だけ易しくなっている．東大の(3)番の $f_{2n+1}(x)$ を $f_{n+1}(x)-f_{n-1}(x)$ に代えれば，千葉大の(2)番と同じになる．

n が奇数の場合は，$I_{2m+1}-I_{2m-1}=0$ に気が付けば，かなり易しい．東大は，この奇数の場合のみを出題している．

n が偶数の場合を解くのは，千葉大の(2)番のような誘導がないと，少し難しい．いずれにせよ

$$I_{2m}-I_{2m-2}=(-1)^{m+1}\frac{2}{2m-1}$$

などにより　$I_2-I_0=\dfrac{2}{1}$

を素通りせずに，「良く見て，計算でチェックする」ことがポイントとなる．

ちなみに，$S_m=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k-1}$ は「ライプニッツの級数」で，その値は $\dfrac{\pi}{4}$ である．

2．論理展開

(i)　三角関数の公式

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-{}_n\mathrm{C}_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+{}_n\mathrm{C}_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$

$$\sin n\theta = {}_nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - {}_nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$
$$+ {}_nC_5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \cdots\cdots$$

(ii) 関数 $F(\theta)=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$, $G(\theta)=\dfrac{\cos n\theta}{\cos\theta}$ は $\sin^2\theta=x$ とおくとき, $\dfrac{n-1}{2}$ 次の関数である (ただし, n は正の奇数とする).

(iii) **無限乗積表示**

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\frac{x^2}{(k\pi)^2}\right\}$$
$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\frac{x^2}{\left(\dfrac{2k-1}{2}\pi\right)^2}\right\}$$

(iv) **ウォリスの公式**

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2k}\right)^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{\pi}{2}$$

(v) **テイラー展開**

$$\sin t = t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\frac{1}{7!}t^7+\cdots\cdots$$
$$\cos t = 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots\cdots$$

(vi) **オイラーの級数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

以下, この(i)～(vi)について考える.

3. 三角関数の公式

ド・モアブルの定理により

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

また, 二項定理により

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta)^n+{}_nC_1(\cos\theta)^{n-1}(i\sin\theta)$$
$$+{}_nC_2(\cos\theta)^{n-2}(i\sin\theta)^2+\cdots\cdots+(i\sin\theta)^n$$
$$=\cos^n\theta-{}_nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+{}_nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$$
$$+i({}_nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-{}_nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots)$$

実部と虚部の比較により

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-{}_nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$
$$+{}_nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$
$$\sin n\theta={}_nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-{}_nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$
$$+{}_nC_5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots\cdots$$

4. $F(x)$, $G(x)$ は x の $\dfrac{n-1}{2}$ 次の関数

公式(i)により

(1) $$\frac{\cos n\theta}{\cos\theta}=\cos^{n-1}\theta-{}_nC_2\cos^{n-3}\theta\sin^2\theta$$
$$+{}_nC_4\cos^{n-5}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$
$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}={}_nC_1\cos^{n-1}\theta-{}_nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^2\theta$$
$$+{}_nC_5\cos^{n-5}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$

よって, $\sin^2\theta=x$ とおくと, $\cos^2\theta=1-x$ より, $n=2m+1$ すなわち, $m=(n-1)/2$ として

(2) $$G(x)=(1-x)^m-{}_nC_2(1-x)^{m-1}x$$
$$+{}_nC_4(1-x)^{m-2}x^2-\cdots\cdots$$
$$F(x)=n(1-x)^m-{}_nC_3(1-x)^{m-1}x$$
$$+{}_nC_5(1-x)^{m-2}x^2-\cdots\cdots$$

すなわち, θ の関数 $F(\theta)=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$, $G(\theta)=\dfrac{\cos n\theta}{\cos\theta}$ は, ともに, x の $\dfrac{n-1}{2}$ 次の関数である.

したがって, $n=2m+1$ のとき, 2つの方程式 $F(x)=0$, $G(x)=0$ は, どちらもm個の解をもつから,「代数学の基本定理」により, $F(x)=0$ のm個の解を $x=x_1$, x_2, ……, x_m とすると,

(3) $$F(x)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=c(x_1-x)(x_2-x)\cdots\cdots(x_m-x)$$

と因数分解の形に表せる (以下, 関数 $G(x)$, $\cos x$ の「無限乗積表示」などについては, 論理展開の都合で, 後述することとし, ひとまず, 関数 $F(x)$, $\sin x$ の「無限乗積表示」などの一切について, 上の「論理展開」で, 述べることにする).

(3)式で, $\sin n\theta=0$ より, $\theta=\dfrac{k}{n}\pi$ であるから

$$x_k=\sin^2\frac{k}{n}\pi\ (\text{ただし, } k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

また, $x=0$ のときは, $x=\sin^2\theta=0$, $1-x=\cos^2\theta=1$ であるから　$\sin\theta=0$, $\cos\theta=\pm1$

∴　$\theta=n\pi$ (n は任意の整数)

いま, $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin n\theta}{n\theta}\right)\cdot n\cdot\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)=n$

であるが, $\theta\to0$ のとき $x=\sin^2\theta\to0$ であるから

(4) $$\lim_{\theta\to0}F(\theta)=\lim_{x\to0}F(x)=F(0)$$

が成り立つ.

したがって, (4)より, 関数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} & (x\neq0)\\ n & (x=0)\end{cases}$$

は $x=0$ において連続である．

すると，(1)で $\cos\theta=1$ となり，$cx_1x_2x_3\cdots\cdots x_m=n$ であるから

(5) $F(x)=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}=n\left(1-\dfrac{x}{x_1}\right)\left(1-\dfrac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x}{x_m}\right)$

5. 無限乗積

$n\theta=t$ とおくと，$\theta=\dfrac{t}{n}$ であるから，(3)と(5)より

$$\sin t=n\sin\frac{t}{n}\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$$

ここで，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ として

$$\frac{x}{x_k}=\left(\frac{\sin\dfrac{t}{n}}{\sin\dfrac{k}{n}\pi}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sin\dfrac{t}{n}}{\dfrac{t}{n}}\right)^2\cdot\left(\frac{\dfrac{t}{n}}{\dfrac{k}{n}\pi}\right)^2\cdot\left(\frac{\dfrac{k}{n}\pi}{\sin\dfrac{k}{n}\pi}\right)^2$$

$n\to\infty$ のとき　$n\sin\dfrac{t}{n}\to t$

また，k が十分大きい整数 N のとき，例えば $N=\sqrt{n}$ とすると

$$\frac{k}{n}\pi=\frac{N}{n}\pi=\frac{\sqrt{n}}{n}\pi=\frac{1}{\sqrt{n}}\pi$$

よって，$n\to\infty$ のとき　$\dfrac{k}{n}\pi\to 0$

$$\therefore\ \left(\frac{\dfrac{k}{n}\pi}{\sin\dfrac{k}{n}\pi}\right)^2\to 1\qquad\text{よって}\quad \frac{x}{x_k}\to\left(\frac{t}{k\pi}\right)^2$$

したがって，三角関数 $\sin t$ は，次のように無限乗積の形に表せる．

(6) $\sin t=t\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\dfrac{t^2}{(k\pi)^2}\right\}$

$$=t\left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)\left\{1-\frac{t^2}{(2\pi)^2}\right\}\left\{1-\frac{t^2}{(3\pi)^2}\right\}\cdots\cdots$$

$$\cdot\left\{1-\frac{t^2}{(N\pi)^2}\right\}\cdots\cdots$$

6. ウォリスの公式

(6)式で $t=\dfrac{\pi}{2}$ とおくと　$1=\dfrac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1-\dfrac{1}{(2k)^2}\right\}$

よって

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2k}\right)^2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{\pi}{2}$$

すなわち

$$\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot7}\cdots\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\cdots\cdots=\frac{\pi}{2}$$

7. テイラー展開

(6)より，関数 $f(t)=\sin t$ は

$$f(t)=\sin t=a_1t+a_3t^3+a_5t^5+a_7t^7+\cdots\cdots$$

と表せる．ところで，$\sin t$ は t の全区間で，連続かつ n 回微分可能である．

したがって，微分法から

$$f'(t)=\cos t=a_1+3a_3t^2+5a_5t^4+7a_7t^6+\cdots\cdots,$$
$$f''(t)=-\sin t=6a_3t+20a_5t^3+42a_7t^5+\cdots\cdots,$$
$$f^{(3)}(t)=-\cos t=6a_3+60a_5t^2+210a_7t^4+\cdots\cdots,$$
$$f^{(4)}(t)=\sin t=120a_5t+840a_7t^3+\cdots\cdots,$$
$$f^{(5)}(t)=\cos t=120a_5+2520a_7t^2+\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

各式で $t=0$ とおけば，$a_1=1$，$a_3=-\dfrac{1}{3!}$，$a_5=\dfrac{1}{5!}$，$a_7=-\dfrac{1}{7!}$，$\cdots\cdots$となり，$\sin t$ のテイラー展開式

(6)′　$\sin t=t-\dfrac{1}{3!}t^3+\dfrac{1}{5!}t^5-\dfrac{1}{7!}t^7+\cdots\cdots$

を得る．

8. オイラー級数

(6)と(6)′の t^3 の係数比較により

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{3\pi}\right)^2+\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2+\cdots=\frac{1}{3!}$$

これより　$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$

すなわち　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ について

$G(x)$，$\cos x$ の無限乗積表示についても，同様にして，考えることができる．方程式 $G(x)=0$ の m 個の解を $x=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{m-1}$ とすると

$$G(x)=\frac{\cos n\theta}{\cos\theta}$$
$$=c(x_0-x)(x_1-x)(x_2-x)\cdots\cdots(x_{m-1}-x)$$

$\cos n\theta=0$ より　$\theta=\dfrac{2k+1}{2n}\pi$ であるから

$x_k=\sin^2\dfrac{2k+1}{2n}\pi$ (ただし，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$)

また，$G(0)=1=cx_0x_1x_2\cdots\cdots x_{m-1}$ であるから

$$G(x)=\frac{\cos n\theta}{\cos\theta}$$
$$=\left(1-\frac{x}{x_0}\right)\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x}{x_{m-1}}\right)$$

ここで，$n\theta=t$ とおくと

$$\cos t=\cos\frac{t}{n}\prod_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{t}{n}}{\sin^2\frac{2k+1}{2n}\pi}\right)$$

$$\frac{\sin\frac{t}{n}}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}=\frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}\cdot\frac{\frac{t}{n}}{\frac{2k+1}{2n}\pi}\cdot\frac{\frac{2k+1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}$$

$n\to\infty$ のとき，$\frac{t}{n}\to 0$ であるから

$$\cos\frac{t}{n}\to 1,\quad \frac{\sin\frac{t}{n}}{\frac{t}{n}}\to 1$$

また，k が十分大きい整数Nのとき，例えば $N=\sqrt{n}$ のとき

$$\frac{2k+1}{2n}\pi=\frac{2N+1}{2n}\pi$$
$$=\frac{2\sqrt{n}+1}{2n}\pi=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\right)\pi$$

よって，$n\to\infty$ のとき $\quad \frac{2k+1}{2n}\pi\to 0$

$$\therefore\quad \frac{\frac{2k+1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{2n}\pi}\to 1$$

したがって，関数 $\cos t$ は，次のように無限乗積の形に表される．

(7) $\quad \cos t=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)^2}\right)$

$$=\left(1-\frac{t^2}{\left(\frac{1}{2}\pi\right)^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2}\right)\cdots\cdots$$
$$\cdot\left(1-\frac{t^2}{\left(\frac{2N-1}{2}\pi\right)^2}\right)\cdots\cdots$$

いま，$g(t)=\cos t=b_0+b_2t^2+b_4t^4+b_6t^6+\cdots\cdots$ とおくとき，関数 $\cos t$ は，$t=0$ において，連続かつ n 回微分可能であるから

$$g'(t)=-\sin t=2b_2t+4b_4t^3+6b_6t^5+\cdots\cdots,$$
$$g''(t)=-\cos t=2b_2+12b_4t^2+30b_6t^4+\cdots\cdots,$$
$$g^{(3)}(t)=\sin t=24b_4t+120b_6t^3+\cdots\cdots,$$
$$g^{(4)}(t)=\cos t=24b_4+360b_6t^2+\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

各式で，$t=0$ とおくと

$$b_0=1,\ b_2=-\frac{1}{2!},\ b_4=\frac{1}{4!},\ b_6=-\frac{1}{6!},\ \cdots\cdots$$

すなわち，「$\cos t$ のテイラー展開」の式

(7)′ $\quad \cos t=1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\frac{1}{6!}t^6+\cdots\cdots$

が得られる．

(7)と(7)′の t^2 の係数を比較して

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^2+\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2+\left(\frac{2}{5\pi}\right)^2+\cdots\cdots=\frac{1}{2!}$$

よって $\quad 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

すなわち $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

10. 入試問題に戻って考えてみよう

次に，等式(1)を n の値が 3 つのときについて，確かめてみると 3 倍角の公式 $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x$

より $\quad \frac{\sin 3x}{\sin x}=3-4\sin^2x=3\cos^2x-\sin^2x$

$\therefore\quad F(\theta)=\frac{\sin 3x}{\sin x}={}_3C_1\cos^2x-{}_3C_3\sin^2x$

また，正弦の加法定理により

$$\sin(n+1)x-\sin(n-1)x$$
$$=(\sin nx\cos x+\cos nx\sin x)$$
$$-(\sin nx\cos x-\cos nx\sin x)$$
$$=2\cos nx\sin x$$

よって $\quad \frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{\sin x}=2\cos nx$

同様にして $\quad \frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}=2\cos 2nx$

したがって，$f_3(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}$ のとき，定積分

$I_3=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_3(x)dx$ の値は

$$I_3=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3-4\sin^2x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{3-2(1-\cos 2x)\}dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x)dx=\Big[x+\sin 2x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

また $\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2nxdx=\left[\frac{1}{n}\sin 2nx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$

よって，$f_{2n+1}(x)=\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ のとき，定積分

$I_{2n+1}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)dx$ の値は，$I_{2n+1}-I_{2n-1}=0$ より

$$I_{2n+1}=I_{2n-1}=\cdots\cdots=I_3=I_1$$

$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx=\pi$ であるから，$I_{2n+1}=\pi$ となる．

次に，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin nx}{\sin x}dx$ とおくと

$$I_{n+1}-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos nx dx$$

$$=\left[\frac{2}{n}\sin nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

したがって，mを任意の整数とするとき

(ア) $n=2m$ の場合

$$I_{n+1}-I_{n-1}=I_{2m+1}-I_{2m-1}=\frac{1}{m}\sin m\pi=0$$

$$\therefore\quad I_{2m+1}=I_{2m-1}=\cdots\cdots=I_3=I_1$$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$I_{2m+1}=\frac{\pi}{2}$$

(イ) $n=2m-1$ の場合

$$I_{n+1}-I_{n-1}=I_{2m}-I_{2m-2}$$

$$=\frac{2}{2m-1}\sin\left(m\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{2}{2m-1}$$

このとき

$$I_{2m}-I_{2m-2}=(-1)^{m+1}\frac{2}{2m-1},$$

$$I_{2m-2}-I_{2m-4}=(-1)^{m}\frac{2}{2m-3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$I_2-I_0=(-1)^2\frac{2}{1}$$

m個の式を辺々加えて

$$I_{2m}-I_0=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{m+1}\frac{1}{2m-1}\right)$$

$I_0=0$ であるから　　$I_{2m}=-2\sum_{k=1}^{m}\dfrac{(-1)^k}{2k-1}=-2S_m$

すなわち，(ア)，(イ)より

$$I_n=\begin{cases}0 & (n=0)\\ \dfrac{\pi}{2} & (n=2m+1)\\ -2S_m & (n=2m)\end{cases}$$

11．こんな指導も可能か？

次に，$1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$ の結果を用い，級数 $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots\cdots$ の値を求める（これは絶対収束級数であるから，一般項 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ に対して，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ より，収束する）．

$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\cdots$$

とおくと

$$S=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$$

よって，$S-\dfrac{1}{4}S=\dfrac{\pi^2}{8}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

となる．

また，$1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$ の結果を用いて，級数和 $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots\cdots$ の値を求めるには（これも絶対収束級数であるから，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=0$ より，収束する）

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=S+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=S+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{6}$$

したがって　　$S=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{\pi^2}{8}$

〈参　考　文　献〉

内田虎男　「級数論（下）」槙書店
遠藤一成　「π の近似について」数研通信 No.35

（東京都桜美林高等学校）