遠心力とコリオリの力の数理

―― 回転座標系における運動 ――

坂本 茂（さかもと しげる）

Ⅰ 回転座標系での仮想的な力

点Oを中心に点Aが半径 a，角速度 ω の円運動をしているとき，ωt 回転する間に $a\omega t$ 円周を運動する．よって，速度は接線方向に $v=a\omega$ である．この速度ベクトル

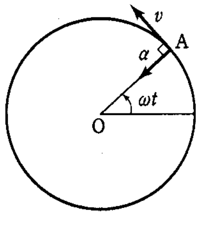


図 1

も半径 v，角速度 ω で円運動をしているから，同様に v の速度は $\alpha=v\omega$ でこの円の接線方向である．したがって，加速度はAからOの向きに $\alpha=a\omega^2$ である．この円運動する質量 m の点AにはOに向かう力 $ma\omega^2$ が働いているが，点Aにおいては仮想的な力 $-ma\omega^2$ が働いているように見える．この慣性抵抗を遠心力という．

点Aを原点とし，AOの方向とともに回転する座標平面は ω で回転している．したがって，任意の点Bから速度 v でAB方向に遠ざかろうと

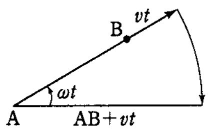


図 2

すれば，時間 t の後にBから vt だけ遠ざかり，その間に ωt だけAの周りを回転する．よって，円周方向に $(\mathrm{AB}+vt)\omega t$ だけ移動し，2回微分して加速度 $2v\omega$ を円周上で ω と反対向きに受けてるように見える．運動物体に働くこの仮想的な力 $2mv\omega$ をコリオリの力という．

慣性系から見て，回転する平面上の任意の点Bは他の任意の点Aの周りを回転している．慣性座標系 $\vec{X}$，回転する座標系 $\vec{x}$ とすると，複素数 w を用い $\vec{X}=w\vec{x}$ として座標変換される．ここで $|w|=1$，$\arg w=\omega t$ とする．$\vec{x}$ 座標上の2点A，Bをそれぞれ複素数 a，b とすると，$\vec{X}$ 座標系で2点A，Bはそれぞれ複素数 wa，wb で表され

$$|wb-wa|=|b-a|=\mathrm{AB},$$

$$\arg(wb-wa)=\omega t+\arg(b-a)$$

であるから，点Bは点Aの周りに角速度 ω の円運動をしている．したがって，コリオリの力は場所に関係なく，向きは角速度と反対向きで速度 $\vec{v}$ に直角であるということができる．

また，Aを原点とするこの回転する座標系では，原点Aと異なる点Bでは座標系が原点Aの周りに回転することによる遠心力 $\vec{f}_{\mathrm{AB}}$ を受ける．これは慣性系からみて原点Oの

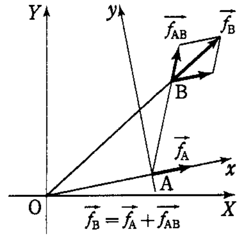


図 3

周りの回転運動による点Bでの遠心力 $\vec{f}_{\mathrm{B}}$ と点Aでの遠心力 $\vec{f}_{\mathrm{A}}$ の差である．遠心力は距離に比例するので，向きも考えて △OAB と力の三角形は，相似形となっていることが分かる．

慣性座標 $\vec{X}$ の原点Oの周りに方向を変えない座標系 $\vec{x}$ の原点Aが半径 a，角速度 ω で回っているとすると座標変換式は

$$\vec{X}=\vec{x}+\vec{r},\quad \vec{r}=(a\cos\omega t,\ a\sin\omega t)$$

$$X=x+a\cos\omega t,\quad Y=y+a\sin\omega t$$

であるが，慣性座標での運動方程式 $m\vec{X}''=\vec{F}$ は

$$X''=x''-a\omega^2\cos\omega t,\quad Y''=y''-a\omega^2\sin\omega t$$

で $\vec{X}''=\vec{x}''-\omega^2\vec{r}$ より，$\vec{x}$ 座標系では

$$m\vec{x}''=\vec{F}+m\omega^2\vec{r}$$

この $m\omega^2\vec{r}$ が遠心力である．コリオリの力は生じない．$\vec{x}$ 座標上のすべての定点はその座標を $\vec{X}$ 座標系の座標とする点を中心に半径 a の円運動をしている．逆変換 $\vec{x}=\vec{X}-\vec{r}$ は

$$x=X+a\cos(\omega t+\pi),\quad y=Y+a\sin(\omega t+\pi)$$

で逆のことも言える．$\vec{x}$ 座標ではOはAの回りに半径 a の円運動をしている．

Ⅱ 地球上での運動

慣性座標 XY の原点Oの周りに角速度 ω で回転

する xy 座標での運動を考える．点 P(x, y) の質点 m は $\vec{x}=(x, y)$ の方向の遠心力 $m\omega^2\vec{x}=(m\omega^2 x, m\omega^2 y)$ を受ける．また，$\vec{v}=(x', y')$ の直角方向にコリオリの力 $2mv\omega$ を受ける．すなわち速度ベクトルと角速度ベクトルの外積 $\vec{v}\times\vec{w}$ 方向であって，成分では $(2m\omega y', -2m\omega x')$ である．

したがって，運動方程式はベクトルで

$$m\vec{x}''=\vec{f}+2m\vec{w}\times\vec{x}'+m\omega^2\vec{x}$$

と表される．成分で書けば次のようになる．

$$mx''=f_1+2m\omega y'+m\omega^2 x$$

$$my''=f_2-2m\omega x'+m\omega^2 y$$

$\vec{x}$ 座標をベクトル $\vec{a}$ で平行移動し，原点を点Aとした座標 $\vec{x}_1$ とすると，変換式は $\vec{x}=\vec{a}+\vec{x}_1$ である．これを運動方程式に代入すれば次のようになる．

$$m\vec{x}_1''=\vec{f}+2m\vec{w}\times\vec{x}_1'+m\omega^2(\vec{a}+\vec{x}_1)$$

これからOの周りのPの遠心力 $m\omega^2\vec{x}$ が，$\vec{x}_1$ 座標ではOの周りのAの遠心力 $m\omega^2\vec{a}$ とAの周りのPの遠心力 $m\omega^2\vec{x}_1$ の和として働いていることが分かる．

次に，地球の中心E，Z 軸が地軸であるような慣性座標 XYZ とO地点で x, y, z の向きをそれぞれ南，東，天頂とする地平座標を xyz とする．いまOをEまで平行移動してきたものとして考えよう．

O地点の緯度を φ とすれば角速度ベクトルは

$$\vec{w}=(-\omega\cos\varphi,\ 0,\ \omega\sin\varphi)$$

と考えられ，x 軸の周りの回転によるコリオリの力は

$$(0,\ -2mz'\omega\cos\varphi,\ 2my'\omega\cos\varphi)$$

Z 軸の周りの回転によるコリオリの力は

$$(2my'\omega\sin\varphi,\ -2mx'\omega\sin\varphi,\ 0)$$

したがって，コリオリの力の総計は

$$2m\omega(y'\sin\varphi,\ -x'\sin\varphi-z'\cos\varphi,\ y'\cos\varphi)$$

である．

ここで，x 軸の周りの角速度 $-\omega\cos\varphi$ による遠心力

$$(0,\ my\omega^2\cos^2\varphi,\ mz\omega^2\cos^2\varphi)$$

と，Z 軸の周りの角速度 $\omega\sin\varphi$ による遠心力

$$(mx\omega^2\sin^2\varphi,\ my\omega^2\sin^2\varphi,\ 0)$$

の和として遠心力は

$$(mx\omega^2\sin^2\varphi,\ my\omega^2,\ mz\omega^2\cos^2\varphi)$$

で与えられるとして良いだろうか．座標平面は角速度ベクトルの成分でそれぞれ回転しているのであるが，点Pは Z 軸の周りに角速度 ω で回転していて，座標平面の回転角速度で回っているのではない．点Pの回転の座標平面への射影は楕円である．遠心力の実際は次のようになる．

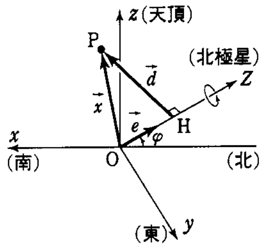


図 4

点Pから Z 軸に下ろした垂線の足Hが回転の中心である．Z 軸方向の単位ベクトル $\vec{e}=(-\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi)$ と $\vec{x}$ との内積はOHである．

$$\mathrm{OH}=\vec{x}\cdot\vec{e}=-x\cos\varphi+z\sin\varphi$$

したがって，回転の動径ベクトル $\vec{d}=\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{e})\vec{e}$ であり

$((x\sin\varphi+y\cos\varphi)\cos\varphi,\ y,\ (x\sin\varphi+y\cos\varphi)\cos\varphi)$

を得る．これより遠心力 $m\omega^2\vec{d}$ が得られた．これは $\vec{x}$ 座標の回転の遠心力で，地球自転による $P(\vec{x})$ での遠心力と原点Oでの遠心力の差である．

原点Eを平行移動して地点Oに戻すと，点Oが Z 軸の周りを回るときの遠心力を，運動方程式に加えなければならない．これと原点Oに働く万有引力は xz 平面上にあり，合わせた力が点Oにおける重力 $-m\vec{g}$ となる．xz 平面上の重力加速度 $\vec{g}$ が Z 軸上にあるように角 φ を選んだものが天文緯度である．

したがって，原地点Oの地表における運動方程式は

$$mx''=f_1+2m\omega y'\sin\varphi+m\omega^2(x\sin\varphi+z\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$my''=f_2-2m\omega(x'\sin\varphi+z'\cos\varphi)+m\omega^2 y$$

$$mz''=f_3-mg+2m\omega y'\cos\varphi+m\omega^2(x\sin\varphi+z\cos\varphi)\cos\varphi$$

となる．これが正しいことを次節で座標変換により導いてみる．

III　座標変換と運動方程式

慣性座標 $\vec{X}$ での運動方程式は $m\vec{X}''=\vec{F}$ であるが，座標変換式 $\vec{X}=T\vec{x}$ をした新しい座標系 $\vec{x}$ での運動方程式を考える．変換式を時間で微分し

$$\vec{X}'=T\vec{x}'+T'\vec{x}$$

$$\vec{X}''=T\vec{x}''+2T'\vec{x}'+T''\vec{x}$$

代入すると，次の式で表される．

$$m\vec{x}''=\vec{f}+2mA\vec{x}'+mB\vec{x}$$

$$\vec{f}=T^{-1}\vec{F},\quad A=-T^{-1}T',\quad B=-T^{-1}T''$$

慣性座標 $\vec{X}$ を原点Oの周りに角 ωt 回転させた座標系 $\vec{x}$ とすれば座標変換の行列 T は

$$T=\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

である．これを微分し T'，T'' を求めて

$$A=-\omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=-\omega^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる．これより次式が得られる．

$$mx''=f_1+2m\omega y'+m\omega^2 x$$
$$my''=f_2-2m\omega x'+m\omega^2 y$$

$(m\omega^2 x,\ m\omega^2 y)$ は遠心力 $m\omega^2\vec{x}$ であり，

$$(2m\omega y',\ -2m\omega x')$$

はコリオリの力で速度ベクトル $\vec{x}'$ に直角である．

この慣性座標に Z 軸を付け加え y 軸周りに $\lambda-90°$ 回転させ Z 軸方向に R だけ平行移動させる．行列 A，B，T は，すべて 0 である 3 行と 3 列を付け加えた 3 次行列とする．λ は原点の地心緯度，R は地球半径，Z 軸は地軸と考えられる．この座標変換は

$$\vec{X}=L(\vec{x}+\vec{a}),\quad \vec{a}=(0,\ 0,\ R)$$

である．すると最初からの変換は $\vec{X}=TL(\vec{x}+\vec{a})$ となる．以下，各変換ごとに古い座標系を $\vec{X}$，新しい座標系を $\vec{x}$ と書いて混乱しないだろう．L は定行列で $\vec{X}'=L\vec{x}'$，$\vec{X}''=L\vec{x}''$ となり，前座標の運動方程式

$$m\vec{X}''=\vec{F}+2mA\vec{X}'+mB\vec{X}$$

に代入し，万有引力 $\vec{g_0}=(0,\ 0,\ g_0)$，$g_0=GMR^{-2}$ を考慮すれば，新座標での運動方程式は次式で与えられる．

$$m\vec{x}''=\vec{f}+m\{-\vec{g_0}+2A_1\vec{x}'+B_1(\vec{x}+\vec{a})\}$$
$$\vec{f}=L^{-1}\vec{F},\quad A_1=L^{-1}AL,\quad B_1=L^{-1}BL$$

さらに，地平座標に変換するには天文緯度 φ との差 $\delta=\varphi-\lambda$ だけ y 軸の周りに回転させればよい．座標変換は $\vec{X}=D\vec{x}$ で最初からの変換は $\vec{X}=TL(D\vec{x}+\vec{a})$ である．同様に D も定行列で $\vec{X}'=D\vec{x}'$，$\vec{X}''=D\vec{x}''$ を，前座標の運動方程式に代入し，次の新たな方程式を得る．

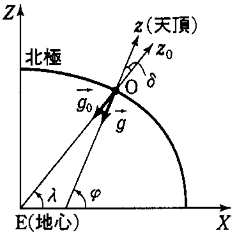


図 5

$$m\vec{x}''=\vec{f}+m(-\vec{g}+2A_2\vec{x}'+B_2\vec{x})$$
$$A_2=D^{-1}A_1D=(LD)^{-1}ALD$$
$$B_2=D^{-1}B_1D=(LD)^{-1}BLD$$

ここで $\vec{g}=D^{-1}(\vec{g_0}-B_1\vec{a})$ は重力加速度である．$2mA_2\vec{x}'$ がコリオリの力，$mB_2\vec{x}$ は $P(\vec{x})$ における遠心力と原点Oにおける遠心力の差である．

変換行列 L，D はともに y 軸の周りの回転を表すから，行列 LD は y 軸の周りの $\varphi-90°$ の回転を表す．すなわち

$$D(\delta)=\begin{pmatrix}\cos\delta & 0 & -\sin\delta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\delta & 0 & \cos\delta\end{pmatrix}$$

とすれば次のようになる．

$$D=D(\delta),\quad L=D(\lambda-90°),\quad LD=D(\varphi-90°)$$

実際に計算して

$$A_2=(LD)^{-1}BLD=m\omega\begin{pmatrix}0 & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & 0 & -\cos\varphi\\ 0 & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}$$

$$B_2=(LD)^{-1}BLD$$
$$=m\omega^2\begin{pmatrix}\sin^2\varphi & 0 & \sin\varphi\cos\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi\cos\varphi & 0 & \cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

となるから，次の運動方程式が導かれる．

$$mx''=f_1+2m\omega y'\sin\varphi$$
$$\qquad +m\omega^2(x\sin\varphi+z\cos\varphi)\sin\varphi$$
$$my''=f_2-2m\omega(x'\sin\varphi+z'\cos\varphi)$$
$$\qquad +m\omega^2 y$$
$$mz''=f_3-mg+2m\omega y'\cos\varphi$$
$$\qquad +m\omega^2(x\sin\varphi+z\cos\varphi)\cos\varphi$$

ここで，重力加速度 $\vec{g}=(0,\ 0,\ -g)$ であり，すなわち $\vec{g}=D^{-1}(\vec{g_0}-B_1\vec{a})$ が Z 軸方向であるように角 δ を選ばなければならない．

$$LB_1\vec{a}=BL\vec{a}(R\omega^2\cos\lambda,\ 0,\ 0)$$

となるのは赤道面と平行な座標では $\vec{x}$ 軸方向を向いていることを示している．これは原点Oが地軸の周りを回るときの遠心力に他ならない．重力加速度 $\vec{g}$ を計算すると

$$B_1=L^{-1}BL=-\omega^2\begin{pmatrix}\sin^2\lambda & 0 & \sin\lambda\cos\lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\lambda\cos\lambda & 0 & \cos^2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\vec{g}=\begin{pmatrix}g_0\sin\delta-R\omega^2(\cos\delta\sin\lambda\cos\lambda+\sin\delta\cos^2\lambda)\\ 0\\ g_0\cos\delta+R\omega^2(\sin\delta\sin\lambda\cos\lambda+\cos\delta\cos^2\lambda)\end{pmatrix}$$

$\vec{g}$ の x 成分が 0 になるように δ は選ばれる．

$$\tan\delta=\frac{R\omega^2\sin\lambda\cos\lambda}{g_0-R\omega^2\cos^2\lambda}=\frac{R\omega^2}{g_0}\sin\varphi\sin\lambda$$

このとき $\vec{g}$ の z 成分が $|\vec{g}|=g$ となるが，引力 $\vec{g_0}$

が地心Eを向いた座標で考えると

$$LD\vec{g}=(R\omega^2\cos\lambda\sin\lambda,\ 0,\ -g_0+R\omega^2\cos^2\lambda)$$

$$g^2=g_0{}^2-2g_0R\omega^2\cos^2\lambda+R^2\omega^4\cos^2\lambda$$

である．（$R=$EO より g_0 は緯度による）

$$TL=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\omega t & -\sin\omega t & \sin\varphi\cos\omega t\\ \cos\varphi\sin\omega t & \cos\omega t & \sin\varphi\sin\omega t\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

IV 角速度ベクトルの分解

角速度ベクトル $\vec{w}$ は角速度 ω の大きさを持ち，ω の向きに回した右ねじの進む向きで，回転面に垂直なベクトルと決めた．角速度ベクトルがベクトルとしての和が成り立つとするならば，ω の回転軸 Z が点Oで z 軸と角 γ と交わっていたとき，Z 軸方向の角速度は $\omega\cos\gamma$ とならなければならない．もし，そうであれば角速度ベクトル $\vec{w}$ が x，y，z 軸方向となす角をそれぞれ α，β，γ とすれば $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ は $\vec{w}$ の方向余弦であり

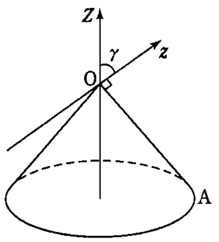
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

であって，$\vec{w}$ は $\vec{x}$ 座標で

$$\vec{w}=(\omega\cos\alpha,\ \omega\cos\beta,\ \omega\cos\gamma)$$

と成分表示され，ベクトルの算法が満たされる．

いま，Oを通り z 軸に垂直な平面と，z 軸上のある点を通り Z 軸と平行な直線の交点をAとする．直線OAが Z 軸の周りに回転すると円錐面を作るが，この円錐面は角速度 ω で中心軸である Z 軸の周りを回転する．円錐面の母線OAを $\mathrm{OA_1}$，$\mathrm{OA_2}$ に切り離し展開すると，中心角が $2\pi\cos\gamma$ の扇形となる．$\mathrm{OA_1}$，$\mathrm{OA_2}$ は z 軸に垂直だから，z 軸は中心Oで扇形の面に垂直になる．扇形は中心角だけ回転するのに $2\pi/\omega$ だけかかるわけだから扇形の面は角速度 $\omega\cos\gamma$ で z 軸の周りを回転する．z 軸に垂直な平面上OA付近の微少平面もこの扇形の面と一緒に z 軸のまわりを角速度 $\omega\cos\gamma$ で回る．したがって，z 軸に垂直な平面全体が角速度 $\omega\cos\gamma$ で z 軸の周りを回ると考えられる．



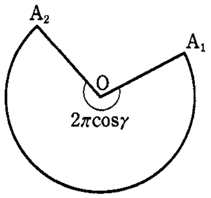


図 6

$\varphi=90°-\gamma$ とすれば $\omega\sin\varphi$．

地上における運動方程式を導くとき，IIではこのことを使って求めている．IIIでは座標変換だけで導いたが，逆に運動方程式から座標面の回転角速度を求めてみよう．

xy 平面上の原点での運動方程式は

$$x''=2\omega y'\sin\varphi,\quad y''=-2\omega x'\sin\varphi$$

となる．$xy''-yx''=-2\omega(xx'+yy')\sin\varphi$ として積分すれば $xy'-yx'=\omega(x^2+y^2)\sin\varphi$ となる．これは極座標で $r^2\theta=-\omega r^2\sin\varphi$ すなわち角速度

$$\theta=-\omega\sin\varphi$$

で回転しようとする．このことは xy 平面が Z 軸の回りに角速度 $\omega\sin\varphi$ で回転していることを示す．

yz 平面では重力を考えなければ運動方程式が

$$y''=-2\omega z'\cos\varphi,\quad z''=2\omega y'\cos\varphi$$

となり x 軸の回りに yz 平面は角速度 $-\omega\cos\varphi$ で回転する．xz 平面では $x''=z''=0$ であり回転はしていない．したがって，極方向 $(-\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi)$ の周りの角速度 ω によって x，y，z 軸方向の角速度 $-\omega\cos\varphi$，0，$\omega\sin\varphi$ が生じることが分かった．

振り子の振動面の回転周期は $\omega\sin\varphi$ である．小学生のとき東京上野の科学博物館でフーコーの振り子を見学してから，コリオリの力に関心を寄せて来た．コリオリの力は航空機，弾道弾などの進路を変え，風や海流にも大きく影響する．地表に対して動く物体すべてに考慮される．

ニュートンの提示した問題，すなわち高さ h の地点で物体を落とした場合．x'，y' は z' にくらべ無視でき運動方程式は

$$x''=0,\quad y''=-2\omega z'\cos\varphi,\quad z''=-g$$

となる．$t=0$ での条件 $x=y=0$，$z=h$，$\vec{x}'=0$ により解くと $z=0$ で

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\,\omega\cos\varphi$$ を得る．

たとえば，333mの東京タワーから落下した物体は東に10.8cm寄って落下する．

（東京都立新宿高等学校）