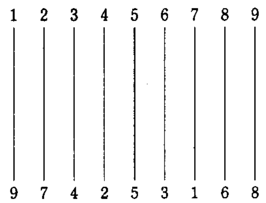
あみだくじの原理

守作（もりさく） 滋（しげる）

テーマ

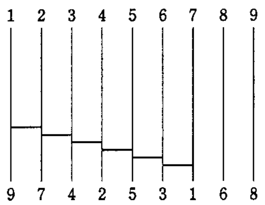
右図のように，n 列のあみだの上の行に左から順に $1\sim n$ を，下の行には順序を変えて書く．このとき，あみだくじの要領で上下の数をつなげる方法について考える．



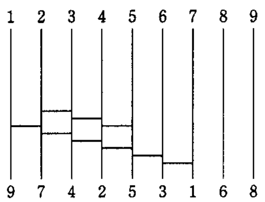
〈方法〉

一般論としては表しにくいので，上の例で方法を説明する．

① まず，下の行で1より大きい数が1より左に6個ある．そこで，上の行の1から始めて，右下の方に6本の横線を書く．

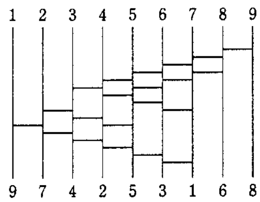


② 次に，下の行で2より大きい数が2より左に3個ある．そこで，上の行の2から始めて，右下の方に3本の横線を，すでに書いた横線より上に書く．



③ さらに，下の行で3より大きい数が3より左に4個ある．そこで，上の行の3から始めて，右下の方に4本の横線をすでに書いた横線より上に書く．

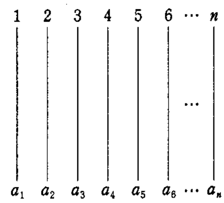
④ このように，順次，下の数で，それぞれの数より大きい数がその数より左に何個あるかによって，上記の要領で横線を書いていく．



上記の方法で横線を書くことによって必ず上下の数がつながる．また，上下の数がつなぐ方法は，もちろん無数に存在するが，上記の方法は，横線の本数が最小であるものの一つとなる．そのことを，次の定理で証明する．ただし定理の中の，$\#\{\ \}$ は集合の要素の個数を表す．

〈定理〉

右図のように，n 本のあみだの上の行には1から n までの自然数が小さい順に記入してあり，また下の行には，1から n までの自然数が番号を変えて記してある．このとき，次のルールに従って横線を書いていくと，あみだくじの方法で上下の数がつながる．



ルール

① $a_{n_1}=1$ のとき，上の行の1から始めて，$\#\{i \mid 1\leqq i\leqq n_1-1,\ a_i>1\}$ 本の横線を右下の方に書く．

② $a_{n_2}=2$ のとき，すでに書いた横線より上の方に，上の行の2から始めて，$\#\{i \mid 1\leqq i\leqq n_2-1,\ a_i>2\}$ 本の横線を右下の方に書く．

③ このように，$1 \leqq k \leqq n$ に対して $a_{n_k}=k$ のとき $\#\{i \mid 1 \leqq i \leqq n_k-1,\ a_i>k\}$ 本の横線を順次 $k=1$ から $k=n-1$ まですでに書いた横線より上の方に，上の行の k から始めて，右下の方に書く．

また，このとき，$\#\{(i,\ j) \mid i<j,\ a_i>a_j\}$ 本の横線を要するが，これは上下の数をつなげる書き方で，接線の本数が最小のつなぎ方の１つである．

証明　まず，このルールで上下の数がつながることを数学的帰納法で証明する．

$n=1$，$n=2$ のときは明らかに成り立つ．

$n=N$ のとき成り立つとし，$n=N+1$ のときを考える．

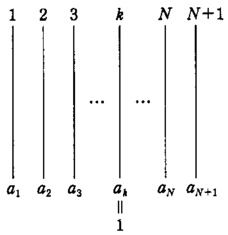


図１

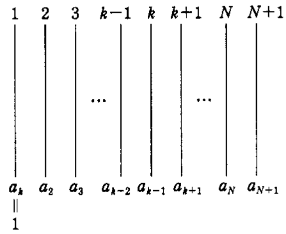


図２

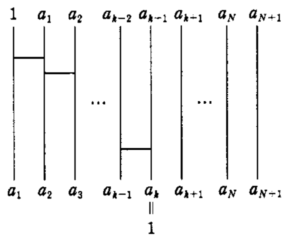


図３

図１において，$a_k=1$ とする．このとき，図２のあみだは，２行目から $N+1$ 行目までがN本であるから，数学的帰納法の仮定より，上下の２から $N+1$ までをルールの方法でつなげることができる．また，図２の下に図３をつなげれば，１から $N+1$ まで上下の数がつながる．また，これはルールの方法に従ったものである．よって，$n=N+1$ のときも成り立つ．

以上のことにより，ルールの方法で上下の数は必ずつながる．

次に，この方法が，横線の本数が最小のつなぎ方の１つであることを示す．そのためには，あみだに l 本の横線をひくとき，$\#\{(i,\ j) \mid i<j,\ a_i>a_j\} \leqq l$ であることを示せばよい．これも数学的帰納法で示していく．

$l=0$，$l=1$ のときは明らかに成り立つ．

$l=M$ のとき成り立つと仮定して，$l=M+1$ のときを考える．

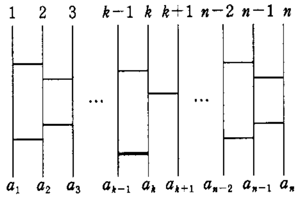


図４

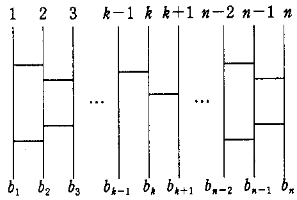


図５

図４に $M+1$ 本の横線が書いてあるとする．この図の中で最も下の横線（この横線を折れたあともう横線を折れないもの）を１本除く．図４の中の a_{k-1}，a_k を結ぶ最も下の横線をそのうちの１つとして，この横線を除く．それを図５とする．

ただし，$i \neq k$，$k+1$ のとき　$b_i=a_i$，また $b_k=a_{k+1}$，$b_{k+1}=a_k$ である．

このとき，図５にはM本の横線があるから，数学的帰納法の仮定より $\#\{(i,\ j) \mid i<j,\ b_i>b_j\} \leqq M$ である．

また，$b_k>b_{k+1}$ のとき

$$\#\{(i,\ j) \mid i<j,\ a_i>a_j\} = \#\{(i,\ j) \mid i<j,\ b_i>b_j\}-1,$$

$b_k<b_{k+1}$ のとき

$$\#\{(i,\ j) \mid i<j,\ a_i>a_j\} = \#\{(i,\ j) \mid i<j,\ b_i>b_j\}+1$$

であるから

$$\#\{(i,\ j) \mid i<j,\ a_i>a_j\} \leqq \#\{(i,\ j) \mid i<j,\ b_i>b_j\}+1=M+1$$

よって，$l=M+1$ のときも成り立つ

以上のことから，すべての l について $\#\{(i,\ j) \mid i<j,\ a_i>a_j\} \leqq l$ となり定理の後半が成り立つことが示された．　**（証明終）**

（埼玉県淑徳与野高等学校）