回想の Jacobian

黒岩(くろいわ) 澄(きよし)

§ 0. はじめに

山口市に，大村益次郎（村田蔵六）が 2 次方程式を解いた「数学ノート」が遺されている．

「数学」には，蘭学の影が漂っている．幕末の蘭学者，高野長英は「数学」にどのように関わっていたのか．佐久間象山が「詳証術」と呼んだものは何であるのか．「数学」が最初に使われたのはいつか．また，「数学」は何の訳語であるのか．

明治の東京数学会社は mathematics を何と訳したのだろう．そのもとの「$\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$」にはどのような意味があるのか．

高校の数学から「公理」や「定義」等がなくなって久しい．「公理」は axiom の訳語であるのか．

この小文で述べることは，このように，全くまとまりのない話である．話を続けよう．

ここ数年，もっと以前からかも知れない．新学期最初に電卓の話をする．$1\div 0$ を電卓で計算させる話である．

高校には，考えさせるという程ではないが，いわゆる計算ではない数学がある．例えば

$$ax^2+bx+c=0 \ (\text{ただし } a \neq 0)$$

$$ax+by+c=0 \ (\text{ただし } (a,\ b) \neq (0,\ 0))$$

このただし書きは，たいてい読みとばされる．1 年生は，$a \neq 0$ はおろか $a<0$ でさえもおぼつかない．

§ 1. 複素数平面

指数を拡張するとき底が正であることを無視できない．よく知られている例がある．

$$1=1^{\frac{3}{2}}=((-1)^2)^{\frac{3}{2}}=(-1)^3=-1$$

虚数 i の定義の後 $\sqrt{-1}$ を含む式の計算をさせる．このとき不合理な計算に言及する．指数を拡張するとき底が 0 や負である場合を切り捨てる．真数は正，底は正であることは当然のこととして過ぎて行く．底が負であると不合理なことが起きる．このことに言及しない．禁止されているのかもしれない．何故だろうか．

虚数を導入すると n（正の整数）次方程式の根がいつも存在する．ここでは，少し違った禁止されているかもしれない展開をしてみよう．

級数 $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$ は $-1<x<1$ で収束する．$f(x)=1+x+x^2+\cdots\cdots$ とおいて，$f'\left(\frac{1}{2}\right)$，$f''\left(\frac{1}{2}\right)$，$\cdots\cdots$を求めて

$$g(x)=2+2(2x-1)+2(2x-1)^2+\cdots\cdots$$

を作る．$g(x)$ は $0<x<1$ で収束する．次に

$$h(x)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}(2x+1)+\frac{2}{27}(2x+1)^2+\cdots\cdots$$

を考える．これは $-2<x<1$ で収束する．

収束域 $-1<x<1$，$0<x<1$，$-2<x<1$ より，次のようなことが考えられる．変数 x は実数値をとるから，収束域の右側の値は x 軸上の 1 を越えてさらに右の方へ行くことはできない．

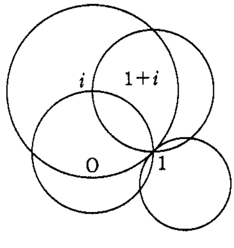
複素数平面では，状況は異なる．

級数 $f(x)$ は $|x|<1$ で収束する．実変数 x を複素変数 z で置き換えると，級数 $f(x)$ は $f(z)=1+z+z^2+\cdots\cdots$ となる．これは $|z|<1$ で収束する．収束域 $|z|<1$ は虚数 $\frac{1}{2}i$ を含む．

$f'\left(\frac{1}{2}i\right)$，$f''\left(\frac{1}{2}i\right)$，$\cdots\cdots$ を求めて級数 $l(z)$ を作る．$l(z)$ の収束域は i を含む．$l'(i)$，$l''(i)$，$\cdots\cdots$ を求めて級数 $m(z)$ を作る．$m(z)$ の収束域 $|z-i|<\sqrt{2}$ は $1+i$ を含む．上と同様にして級数

$$n(z)=i-(z-1-i)-i(z-1-i)^2+\cdots\cdots$$

を作る．いくつかの収束域を右に図示する．実軸，虚軸を外して図示する．



このようにして $z=1$ が特異点であり，極であることが分かる．

実数のみでは点が不足

している．虚数を導入すると，n 次方程式 $f(x)=0$ の根が常に存在するようにできる．これを「曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=0$ との交点が常に存在する」のように言い換えることもできる．例外的な場合，例えば直線 $y=2$ と直線 $y=0$ のような場合でも交点が存在するようにしたい．さらに，異なる (平面代数) 曲線と曲線が常に交点を持つ平面が必要になることもある．

§ 2. 曲線上の演算

曲線上の 2 点に対して算法を定義する．

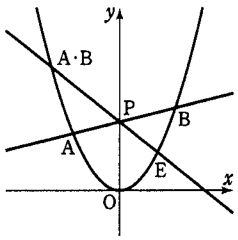
1. パスカルの定理

よく知られている放物線

$$y=x^2 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

上の 2 点に対して算法を定義する．ただし，放物線上の原点を除く．

(1) 放物線①上に定点 E(1, 1) をとる．放物線①上の 2 点 A$(a,\ a^2)$, B$(b,\ b^2)$ をとり，2 点 A, B を通る直線を考える．ただし，$ab\neq 0$ とする．もし，2 点 A, B が同一の点である場合，この直線として点Aにおける接線を考える．下図のように直線 AB と y 軸との交点をPとし，直線 PE と放物線①との交点を記号 A·B で表す．



点 B·A は，その作り方から点 A·B と一致する．これを記号で A·B=B·A とする．この等式を放物線①上の 2 点に対して定義した算法に対し，交換法則が成立していると考えるのである．

記号としての = や・に対し，次の事柄は自明である．

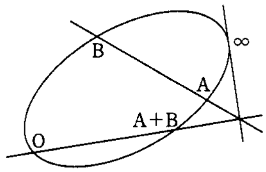
(2) (A·B)·C=A·(B·C)

(3) 定点Eに対し，A·E=A である．

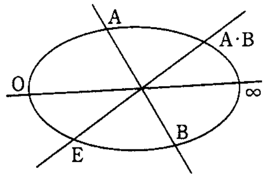
(4) 定点Eに対し，A·G=E を満たす放物線①上の点Gが存在する．

正射影 $\varphi:(t,\ t^2)\longrightarrow t$ とする．写像 φ は準同型であるとも考えられる．

ここで示した算法のもとは次の図である．



$\Gamma=C-\{\infty\}$



$\Gamma=C-\{0,\infty\}$

これらは A. Seidenberg [8] によるものである．最初の例は高校生に例示できない．それは無限遠点において接線を引いているからである．高校生の場合 (当然のことであるが) 無限遠点は非常に遠い所にある．無限遠点に立ってみようなどという考えを高校生が気楽に起こすことを禁止されているのかも知れない．後者の例を放物線①について例示した．

なお，放物線①上でパスカルの定理を検証できる．

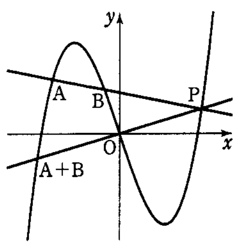
2. 3 次曲線

放物線上に算法を定義した要領で，次の曲線②上の 2 点に対しても算法を定義しよう．

$$y=x(x^2-3) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

曲線②は今話題の楕円曲線，例えば $y^2=x(x^2-3)$ ではない．曲線②は無限遠点に特異点を持っている．

曲線②上に 2 点 A, B をとる．もし，A, B が同一の点である場合，接線を考えることは放物線の場合と同様である．では始めよう．



(1) 原点を点Oとする．直線 AB と曲線②との交点をPとし直線 PO と曲線②との交点を A+B で表す．

点 B+A も，その作り方から点 A+B と一致する．これも記号として A+B=B+A とする．

放物線の場合と同様に，次の事柄も自明である．

(2)　$(A+B)+C=A+(B+C)$

(3)　定点Oに対し，$A+O=A$ である．

(4)　定点Oに対し，$A+G=O$ を満たす曲線②上の点Gが存在する．

正射影 $\varphi:(t,\ t^3-3t)\longrightarrow t$ とする．写像 φ も準同型であると考えられる．

例示した，曲線上の演算は，高校生に群の定義を教えていた頃の話である．そこでは，乗法の単位元はたいてい“1”が関係している．ところで，集合 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ に演算を定義することができる．

曲線 $y=x^3+2x$ において，最低次の項を取り出すと $y=2x$ が得られる．これは原点における接線である．

曲線 $y^2=x^3+x^2$ において，最低次の項を取り出すと $y^2=x^2$．この方程式から $y=x$ と $y=-x$ が得られる．これらは特異点における接線である．

曲線の特異点での接線とは何か．特異点での接線をどのように定義するのか．いずれの話にも立ち入らない．

§ 3. 算法発揮

クラメルの解法はよく知られている．行列式を用いて文字を消去し，軌跡を求めることもできる．固有値を求めるとき，行列式を用いることもよく知られている．

高次の連立方程式を解くときに，行列式が役に立つことはあまり知られていない．

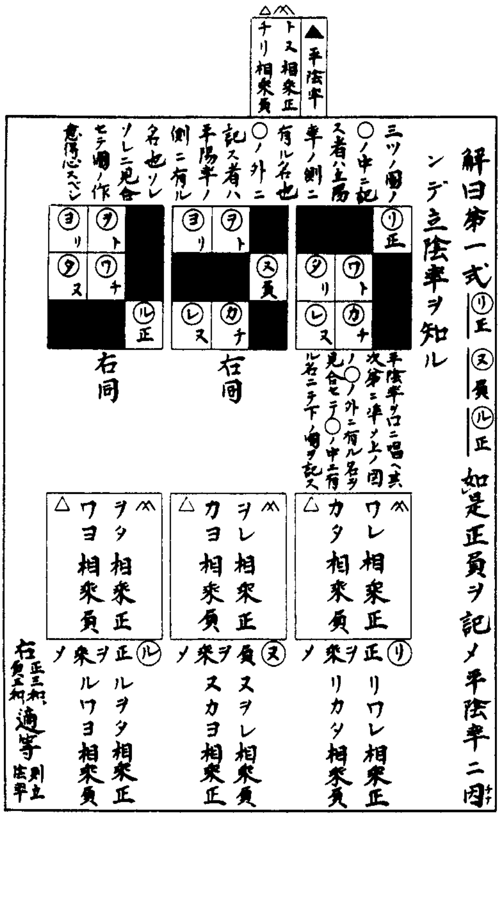
江戸時代，日本では，高次連立方程式の文字を消去するのに，行列式を用いている．洋算では如何なる必要性から行列式を考えたのだろう．

後に，行列や行列式が必要になる．行列式といえば，「算法発揮」である．著者の井関知辰は大坂の人と云われている．

算法発揮のコピーは日本学士院所蔵の写本のコピーである．掲載にあたり，許可された日本学士院に謝意を表したい．

この内容を現代流に表すと

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} - s\begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix}$$



§ 4. 終結式

多項式 $P=X^2+2$ と $Q=X+1$ は互いに素である．多項式 A，B を適当に選べば

$$A(X^2+2)+B(X+1)=1 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

とできる．多項式 A，B を，通常次のようにして求める．

$$A(X^2+2)\equiv 1 \quad \mathrm{mod}(X+1)$$

多項式 A，B を再度求めてみよう．

$X^2+2=P$，$X+1=Q$ とおく．P，Q から

$$X^2+2=P$$
$$X^2+X=XQ$$
$$X+1=Q$$

を考え，次のような連立方程式を考える．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^2 \\ X \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P \\ XQ \\ Q \end{pmatrix}$$

この連立方程式において“1”を未知数と考えて解くのである．③式の形にすると

$$\frac{1}{3}(X^2+2)+\frac{1-X}{3}(X+1)=1$$

この最後の式から，多項式 X^2+2 と $X+1$ は互いに素であるともいえる．

§ 5. 射影空間

$$\frac{1}{0}+\frac{1}{1}=\frac{1\times 1+0\times 1}{0\times 1}=\frac{1}{0}$$

これは新学期，1年生の最初の授業でよく使う計算例である．この計算例もよく知られている．

有理数を定義するときの初めのところを見てみよう．Z を有理整数環とする．直積 $\mathrm{Z}\times(\mathrm{Z}-\{0\})$ の元 $(a,\ s)$ と $(b,\ t)$ に対して同値関係を定義する．

$(a,\ s)\sim(b,\ t)\Longleftrightarrow\exists u\in(\mathrm{Z}-\{0\}),\ u(ta-sb)=0$

このとき s，t，$u\neq 0$ である．もし 0 を認めると上記のような結果になる．

視点を変えよう．$\dfrac{1}{0}$ は認められないが $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}=\infty$ である．

さて，無限遠点に立って原点の方向を見たい．そのときは，2点 $(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ に対して，後に述べる同値関係を定義するとよいことが知られている．

円錐曲面上で，円と放物線を対応させる話はよく知られている．ここでは，筆者が参考書で読んだ話を，記憶を頼りに再現してみよう．

焦点を $\mathrm{F}(1,\ 0)$，$\mathrm{F}'(t-1,\ 0)$ [ただし $t>1$] とし，楕円上の点Pを $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする．

$\mathrm{FP}+\mathrm{PF}'=t$ とする．教科書（昔の数II）の計算式を変形して

$$t\sqrt{(x-1)^2+y^2}=t(x+1)-2x$$

$t>1$ であるから

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1-\frac{2}{t}x \quad \cdots\cdots \text{④}$$

さて，$x<t$ のとき，原点に十分近い所で $\dfrac{2}{t}x$ を 0 に等しくしてもよいような場合，式④は

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1$$

よって　$y^2=4x \quad \cdots\cdots$ ⑤

⑤は放物線の方程式である．

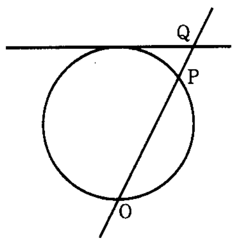
この話はあまりにも物理的である．もう少し数学らしい話を作る．

R を実数体とする．xy 平面を直積 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}=\mathrm{R}^2$ で表す．R^2 の点 $(a,\ b)$ をとる．この座標の a，b を用いて　$ax+by=0 \quad \cdots\cdots$ ⑥

を作る．⑥が直線の方程式とならない平面 R^2 の点は原点である．

定義1　方程式 $ax+by=0$ が直線の方程式であるとき，これが示す直線を $(a:b)$ で表す．

定義2　2つの方程式 $ax+by=0$，$cx+dy=0$ が図形として同一の直線を表すとき $(a:b)=(c:d)$ とする．



直線 $ax+by=0$ と円 $x^2+(y-1)^2=1$ との交点Pを求め，$(a:b)$ に点Pを対応させる写像を φ とする．写像 φ は全単射である．

$$\varphi:(a:b)\to\left(\frac{-2ab}{a^2+b^2},\ \frac{2a^2}{a^2+b^2}\right)$$

点Pの分母 a^2+b^2 は零にならない．しかし，a，b が複素数のとき，a^2+b^2 が零になることもある．

ここで述べた事柄の2つのことに注目する．

第1はこれを空間（3次元空間 R^3）の場合に拡張することである．

空間（3次元空間）の原点以外の点 $(a,\ b,\ c)$ をと

り原点を通る平面

$$ax+by+cz=0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

を作る．⑦に直線の代役をさせたい．平面は異なる3点で決定される．原点が固定されているので，残りの2点で平面⑦は決定される．また，異なる2点を通る直線は1本しかない．このことに注意しよう．

方程式 $ax+by+cz=0$ が表す図形(平面)を l で表す．これを記号 $(a:b:c)$ で表すこともある．l に直線の代役をさせたい．

行列の固有値と直線 $ax+by+cz=0$ とを用いて不動直線を論じることができる．$ax+by+c=0$ が直線の方程式とならない点 $(a,\ b,\ c)$ の集合は何か．記号 $(a:b:c)$ の集合は，射影平面と呼ばれている．など，いくつかの事柄が浮かぶ．射影平面は自然な形で定義されるべきである．これらの話はすべて別の機会に譲ろう．

第2は，円と直線が対応していることである．

§ 6. メジアン

次数の異なる曲線の間の対応が付けられる写像として反転がある．

以下は，次数の異なる曲線の間の対応が反転以外にも身近にあることを報告するものである．

1983 メジアン数学演習 I・II B (数研出版) の51ページにある例題と解答に注目しよう．

> **例題 25**　x の2次方程式 $x^2+2ax+b=0$ の2つの解を α, β とする．点 $(\alpha,\ \beta)$ が原点を中心とし半径 $\sqrt{2}$ の円の内部にあるとき，放物線 $y=x^2+2ax+b$ の頂点が存在する範囲を図示せよ．　[類 54 同志社大]

解答　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2a,\quad \alpha\beta=b$$

α, β は点の座標であり，実数であるから

$$D/4=a^2-b\geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

点 $(\alpha,\ \beta)$ が原点を中心とし，半径 $\sqrt{2}$ の円の内部にあるから

$$\alpha^2+\beta^2<2$$
$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta<2$$
$$(-2a)^2-2b<2$$
$$2a^2-b<1 \quad \cdots\cdots ②$$

$y=x^2+2ax+b=(x+a)^2+b-a^2$ であるから，頂点を $(X,\ Y)$ とすると

$$X=-a,\quad Y=b-a^2$$

ゆえに　$a=-X,\ b=Y+X^2$

これを①，②に代入すると

$$(-X)^2-(Y+X^2)\geqq 0,\quad 2(-X)^2-(Y+X^2)<1$$

ゆえに　$X^2-1<Y\leqq 0$

したがって，求める範囲は $x^2-1<y\leqq 0$ (図略)

ただし，境界線のうち，放物線 $y=x^2-1$ 上の点は含まないで，他は含む．

この解答の中の2つの事柄に注目する．

第1は，写像 $X=-a,\ Y=b-a^2$ である．

第2は，写像 $X=-a,\ Y=b-a^2$ による放物線 $a^2-b=0$ (次数2)の像が直線 $y=0$ (次数1)になることである．

この写像をあらためて

$$f=X,\quad g=Y+X^2$$

とする．この写像も平面 R^2 で全単射である．重複を厭わず第2の事柄に言及する．

この写像によっても，直線と放物線との間の対応をつけることができる．例えば直線 $x-y=0$ の像は放物線 $x+x^2-y=0$ である．例はいくらでもできる．注目したい事柄は，2つの方程式の次数が異なることである．

第2の事柄を視点を変えて，さらに追究しよう．

写像を $f=X,\ g=Y+X^2$ とする．2変数の多項式 $P(X,\ Y)=Y-X^2$ に対して $P(f,\ g)$ を考えると $P(f,\ g)=g-f^2=Y$ である．

次のようなことが考えられる．(ただし R は実数体である)

$$\mathsf{R}[f,\ g]=\mathsf{R}[X,\ Y+X^2]=\mathsf{R}[X,\ Y]$$

1つの例が得られると，似たような例は次々と得られる．例えば，写像を

$$f=2X+Y+X^2,\quad g=X+Y+X^2$$

とすると　$\mathsf{R}[f,\ g]=\mathsf{R}[X,\ Y]$

記号の定義などをして次のような事柄を考えよう．

実数体 R 上の2変数 X, Y の多項式環 $\mathsf{R}[X,\ Y]$ を考える．多項式環 $\mathsf{A}=\mathsf{R}[X,\ Y]$ とし，多項式環 A と A の直積を A^2 すなわち $\mathsf{A}^2=\mathsf{A}\times\mathsf{A}$ とする．直積 A^2 の元 $\varphi=(f,\ g)$ をとり偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial X}$, $\dfrac{\partial f}{\partial Y}$, $\dfrac{\partial g}{\partial X}$, $\dfrac{\partial g}{\partial Y}$ を考え，これらを成分にもつ行列 $j(\varphi)$ を考える．すなわち

$$j(\varphi)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial X} & \dfrac{\partial f}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial X} & \dfrac{\partial g}{\partial Y} \end{pmatrix}$$

さらに，$j(\varphi)$ から行列式 $J(\varphi)$ を作る．

$$J(\varphi)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial X} & \dfrac{\partial f}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial X} & \dfrac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix}$$

これは Jacobian とも呼ばれている行列式である．

先に例示した

$$f=2X+Y+X^2,\quad g=X+Y+X^2$$

に対して $J(\varphi)$ を計算すると

$$J(\varphi)=1$$

である．

§ 7. SpecZ/(6)

点の意味を少し拡大する．

有理整数環を Z で表す．環 Z の単項イデアル (6) による剰余環を Z/(6) で表す．

環 Z/(6) の元を単に $f \in$ Z/(6)，環 Z/(6) の素イデアルを (2)，(3) と書いても誤解の恐れはないだろう．

環 Z/(6) の素イデアルの集合を SpecZ/(6) で表す．すなわち　SpecZ/(6)＝{(2)，(3)}

2種類の集合を定義する．$\mathfrak{p}$ を環 Z/(6) の素イデアルとし，$f \in$ Z/(6) とする．

$$V(f)=\{\mathfrak{p} \mid f \in \mathfrak{p}\}$$

$D(f)=V(f)$ の補集合

実際に $D(f)$ を求める．

$D(0)=\phi$ (空集合)，

$D(1)=$SpecZ/(6)$=\{(2),(3)\}$，

$D(2)=\{(3)\}$，　$D(3)=\{(2)\}$，

$D(4)=\{(3)\}$，

$D(5)=$SpecZ/(6)$=\{(2),(3)\}$

a，b，c を環 Z/(6) の元とする．

$D(a)\cap D(b)$ が空集合でないとき，a，b から作られる順序対を (a, b) とし，これを辺と呼ぶ．

$D(1)\cap D(2)=\{(3)\}$，

$D(2)\cap D(1)=\{(3)\}$，

$D(1)\cap D(5)=$SpecZ/(6)$=\{(3),(2)\}$

であるから，辺は (1，2)，(2，1)，(1，5) 等である．

$D(a)\cap D(b)\cap D(c)$ が空集合でないとき a，b，c から作られる順序対を (a, b, c) とする．

順序対 (a, b, c) を三角形と呼ぶ．

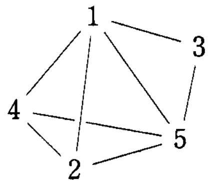
$D(1)\cap D(3)\cap D(5)=\{(2)\}$，

$D(1)\cap D(5)\cap D(3)=\{(2)\}$

であるから，(1，3，5)，(1，5，3) 等がある．

さらに，(1，2，4，5) は三角錐である．

これらの結果から，右のような図形ができる．



この図形をもとに，いくつかの加群が作られることが知られているが，ここでは言及しない．

むしろ SpecR[f，g] に言及したいと考えている．

§ 8. あとがき

平面上の点の集合として $\{(x, y) \mid y=x\}$ と書くべきところを直線 $y=x$ と表したところもある．

本文で触れなかった幾つかの著書を以下に掲げる．もとより，これら以外にも多くの著書を参考にした．以下に掲げる著書はその主な著書である．本文でも触れたように，原典が不明の箇所がいくつかある．

まえがきは，主に次の著書による．

[1] 川尻信夫：幕末における西洋数学受容の一断面——佐久間象山の「詳証術」をめぐって——文藝春秋

[2] 小松醇郎：幕末・明治初期　数学者群像 (上) 幕末編　吉岡書店 (1990)

[3] 村田全：数学史散策　ダイヤモンド社 (1974)

複素数平面は

[4] 函数論 (講義録)

他によるものであるが，記憶を頼りに記述した．

曲線上の演算，算法発揮，終結式，射影空間は

[5] 中野茂男：代数幾何学入門　共立出版 (1969)

[6] 田崎中：江戸時代の数学　総合科学出版 (1983)

[7] Fulton，W.：Algebraic Curves，W.A.Benjamin，INC. (1969)

[8] Seidenberg，A.：Elements of the Theory of Algebraic Curves，Addison—Wesley (1968)

メジアン，SpecZ/(6) は

[9] 秋月康夫，中井喜和，永田雅宜：代数幾何学 岩波書店 (1987)

[10] 宮西正宜：多項式環とその周辺，数学 31 岩波書店 (1979)，97—109

[11] Shafarevich，Igor R.：Basic Algebraic Geometry，Springer—Verlag (1977)

[12] Vitushkin，A.G.：On Polynomial Transformations of C^n，Manifolds Tokyo 1973，University of Tokyo Press (1975)，415—417

(大阪府立茨木工業高等学校)