ベクトル —— 思い出の問題と自作の問題

横山　治夫（よこやま　はるお）

1. $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ の思い出

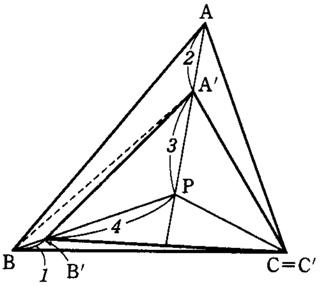
最近，この問題を課題テストに出題したので，改めて，昭和44年に筆者がN大を受験したときのことを思い出した．今では頻出問題として，余りにも有名になってしまった問題であるが，入試に出題されたのは，多分これが初めてだろうと思う．そのとき，私の頭の中には，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$（つまり，係数がそろっている）ならば，点Pは△ABCの重心だということがあって，何とかこの形にしようと思ったのであるが，できなかった（勿論，問題は，△PAB：△PBC：△PCA を求めることである）．次に，内積を利用しようとしたが，これも結局できなかった．しかし，これらは次のようにしてできるので，拙文にした次第である．

(1) 重みつき重心とみる

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{PA'}},\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{PB'}},\ \mathrm{C}=\mathrm{C'}$$

とおけば　$5\overrightarrow{\mathrm{PA'}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB'}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC'}}=\vec{0}$

となるので，点Pは△A′B′C′の重心である．点A，Bはそれぞれ，$\overrightarrow{\mathrm{PA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB'}}$ を $\frac{5}{3}$ 倍，$\frac{5}{4}$ 倍に伸ばしたものであるから，下のような図になる．



図において，Pは△A′B′C′の重心である．

この図と △PA′B′=△PB′C′=△PC′A′ から，△PAB：△PBC：△PCA を次のように，初等的に求めることができる．

(ア)　△PCA′=3 とすれば，△ACA′=2 であるから

$$\triangle\mathrm{PCA}=5$$

(イ)　△PA′B′=3 であるから

$$\triangle\mathrm{PA'B}=\frac{5}{4}\triangle\mathrm{PA'B'}=\frac{15}{4}$$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{5}{3}\triangle\mathrm{PA'B}=\frac{5}{3}\times\frac{15}{4}=\frac{25}{4}$$

(ウ)　$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{5}{4}\triangle\mathrm{PB'C'}=\frac{5}{4}\times 3=\frac{15}{4}$

∴　△PAB：△PBC：△PCA

$$=\frac{25}{4}:\frac{15}{4}:5=5:3:4$$

これは，もう少し計算的に，次のようにもできる．

$$\mathrm{PA}=a,\ \mathrm{PB}=b,\ \mathrm{PC}=c$$
$$\mathrm{PA'}=a',\ \mathrm{PB'}=b',\ \mathrm{PC'}=c'$$

とすると　$a'=\frac{3}{5}a,\ b'=\frac{4}{5}b,\ c'=c$

また，$\angle\mathrm{APB}=\theta_3$，$\angle\mathrm{BPC}=\theta_1$，$\angle\mathrm{CPA}=\theta_2$ とすると

$$\frac{1}{2}a'b'\sin\theta_3=\frac{1}{2}b'c'\sin\theta_1=\frac{1}{2}c'a'\sin\theta_2$$

であるから

$$\frac{6}{25}ab\sin\theta_3=\frac{2}{5}bc\sin\theta_1=\frac{3}{10}ca\sin\theta_2$$

この式の値を k とおくと

△PAB：△PBC：△PCA

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta_3:\frac{1}{2}bc\sin\theta_1:\frac{1}{2}ca\sin\theta_2$$

$$=\frac{25}{12}k:\frac{5}{4}k:\frac{5}{3}k=5:3:4$$

しかし，これらの方法では，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を延長して，辺BCと交わる点をDとしたときの BD：DC（または AP：PD）が分からない．

逆に AP：PD=3：1，BD：DC=5：4 であることを知っていると

$$\overrightarrow{PA'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}\quad \overrightarrow{PB'}=\frac{8\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{9},\ C=C'$$

とおくことにより

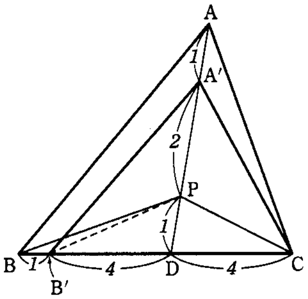
$$\overrightarrow{PA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PA'},\ \overrightarrow{PB}=\frac{9\overrightarrow{PB'}-\overrightarrow{PC'}}{8},\ \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC'}$$

を代入すると

$$\frac{9}{2}\overrightarrow{PA'}+4\times\left(\frac{9\overrightarrow{PB'}-\overrightarrow{PC'}}{8}\right)+5\overrightarrow{PC'}=\vec{0}$$

$$\therefore\quad \frac{9}{2}\overrightarrow{PA'}+\frac{9}{2}\overrightarrow{PB'}+\frac{9}{2}\overrightarrow{PC'}=\vec{0}$$

となって，係数をそろえることができる．これは，次の図を参照して頂きたい．



AP：PD＝3：1 より，A′P：PD＝2：1 にするためには，PA′：PA＝2：3 となるようにとればよい．また，B′D＝DC となる B′ は，辺 BC の 9 等分点のうち，一番B寄りのものであるから，前述のようにおいた．このように，係数をそろえるには 2 通りの方法がある．

(2) 内積の利用

これは次のように，ひたすら計算する方法である．$3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ に，$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ を順次，内積する．

$$3|\overrightarrow{PA}|^2+4\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$$
$$3\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+4|\overrightarrow{PB}|^2+5\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$$
$$3\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}+4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+5|\overrightarrow{PC}|^2=0$$

以下，簡単のために，$|\overrightarrow{PA}|=a$，$|\overrightarrow{PB}|=b$，$|\overrightarrow{PC}|=c$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=y$，$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=z$ とおくと，上式は

$$4x+5z=-3a^2\ \cdots\cdots\ ①$$
$$3x+5y=-4b^2\ \cdots\cdots\ ②$$
$$3z+4y=-5c^2\ \cdots\cdots\ ③$$

となる．①，②，③を連立して，解くと

$$x=\frac{1}{24}(25c^2-9a^2-16b^2)=ab\cos\theta_3$$
$$y=\frac{1}{40}(9a^2-16b^2-25c^2)=bc\cos\theta_1$$
$$z=\frac{1}{30}(16b^2-25c^2-9a^2)=ca\cos\theta_2$$

となる．(ただし，θ_1，θ_2，θ_3 は(1)と同じとする)

例えば，△PAB は

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}ab\sin\theta_3$$
$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\theta_3}$$
$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left\{\frac{1}{24ab}(25c^2-9a^2-16b^2)\right\}^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{24}\sqrt{(24ab)^2-(25c^2-9a^2-16b^2)^2}$$
$$=\frac{1}{48}\sqrt{T}$$

$$[T=(3a+4b+5c)(3a-4b+5c)\times(3a+4b-5c)(-3a+4b+5c)]$$

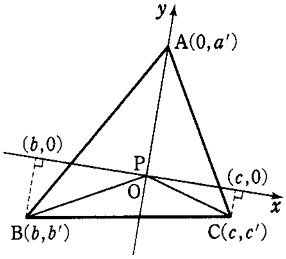
となる．同様な計算により

$$\triangle PBC=\frac{1}{80}\sqrt{T}$$
$$\triangle PCA=\frac{1}{60}\sqrt{T}$$

となるので

$$\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=\frac{1}{48}:\frac{1}{80}:\frac{1}{60}$$
$$=5:3:4$$

以上は，この問題に対する，私個人の再挑戦なので，かなり迂遠な部分もある．最も簡単だと思われる方法を，同僚のY先生からお聞きしたので，紹介する．それは，座標軸を，Pを原点として，y 軸を PA 方向にとり，x 軸方向の成分を考えるものである．座標は A$(0,\ a')$，B$(b,\ b')$，C$(c,\ c')$ とおけるので，成分の比較により



$$4b+5c=0$$

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}|b|\times PA,\ \triangle PCA=\frac{1}{2}|c|\times PA$$

であるから，$\triangle PAB:\triangle PCA=|b|:|c|=5:4$ がすぐに求まる．今度は座標軸をとりかえて，y 軸を PB 方向にとれば，△PAB：△PBC が求まるわけである．

2．四面体の体積

さて，それから30年の歳月が流れて，筆者は昨年と今年，２年続けて，２年生の授業を受け持った．昨年の定期考査で，次のような四面体の問題を課した．

問題 A　空間に原点 O(0, 0, 0) と４点 A(3, 1, 1), B(4, 2, 2), C(−2, −2, 2), P($2k$, $-3k$, k) がある．

(1)　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{OP}=(2k, -3k, k)$ は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直であることを示せ．

(4)　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たすような，k, s, t を求めよ．

(5)　(4)で求めた k に対し，$|\overrightarrow{OP}|$ を求め，四面体 OABC の体積を求めよ．

勿論，ポイントは(4)である．普通は内積で，s, t を求めるが，１次独立性より k, s, t が求まって，長さを求める方法である．

今年度もこれに類したことをやりたかったのであるが，同じことをやるのはつまらないので，もともとの内積を使うことを考えたが，それだと，上のように座標を使った場合は，計算が面倒になる．そこで，座標を消し去った次の問題を考えた．

問題 B　(イ)　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=\sqrt{29}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$ であるとき

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ．

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\triangle OAB$ の面積を求めよ．

(ロ)　空間において，$\vec{a}$, $\vec{b}$ について(イ)が成り立っているとし，更に $\vec{c}$ について，

$$|\vec{c}|=\sqrt{35},\ \vec{a}\cdot\vec{c}=3,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=23$$

が成り立っているとする．Hを平面 OAB 上の点とすると，$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と書ける．更に $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ である．このとき

(4)　$\overrightarrow{CH}\perp\vec{a}$, $\overrightarrow{CH}\perp\vec{b}$ となるように，s, t を定めよ．

(5)　図を参考に，$|\overrightarrow{CH}|$ を求め，四面体 OABC の体積を求めよ．

(4)の答は $s=1$, $t=1$ である．「どのようにしたらこのような簡単な数になるように」内積を与えることができるかを考えることが面白かった．この問題を考えるもとになるのは，次の問題である．

問題 C　$\vec{a}=(2, 2, 1)$, $\vec{b}=(2, -3, -4)$ の両方に垂直なベクトルを $\vec{n}=(-1, y, z)$ とするとき

(1)　y, z の値を求めよ．

(2)　そのときの $\vec{a}+\vec{b}-\vec{n}$ を成分で表せ．

実際の試験では，この問題を先に置いて出題した．一見，あまり関係のないように見えるこれらの問題は次のように関係している．

$\vec{a}+\vec{b}-\vec{n}=\vec{c}$ とおくと，$\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ となって，$\overrightarrow{OH}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CH}=\vec{n}$ となるからである．もう１度問題Bを作った手順をまとめてみると

(1)　空間で１次独立な，２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を成分で与えておき，k を好きな数として，$\vec{n}=k\vec{a}\times\vec{b}$ とおく．

(2)　s, t を好きな数として，$s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{n}=\vec{c}$ とおく．ここで使った係数 s, t は

$$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \ \cdots\cdots \text{①}$$

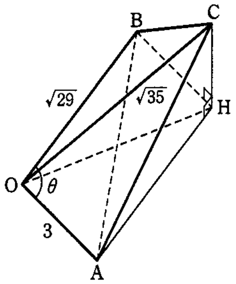
$$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \ \cdots\cdots \text{②}$$

を満たす（$\because$　$\vec{a}\cdot\vec{n}=\vec{b}\cdot\vec{n}=0$）ので，これが，そのまま垂直条件から求まる解となる．

(3)　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ となる３点 A, B, C をとり，O, A, B, C を頂点とする四面体を作って，$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を計算しておいてから，最後に座標を消し去ればよい．
もっとも，$\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$ は後に出てくる③式で，$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ と s, t, k から求まると言った方がよいだろう．

実際に期末考査に出題したこれらの問題は，無理のない問題であるが，本校生徒には，必ずしも，出来はよくなかった．しかし，試験後の解説では，分かってくれた生徒も何人かいた．結局，ベクトルの内積の力で，どんな四面体なのかを見破ることが出来ることが要点なのである．

次に，蛇足であるが，**問題 B** の $|\overrightarrow{CH}|$ の計算と，図を示しておこう．



図において
$OA=BH=3$,
$OB=AH=\sqrt{29}$,
$OC=\sqrt{35}$,
$AB=\sqrt{50}$,
$BC=3\sqrt{2}$,
$AC=\sqrt{38}$,
$OH=\sqrt{26}$,
$CH=3$　である.

勿論, $CH=\sqrt{35-26}=3$ であるが, ここでは(イ)の(1)で求めた $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{26}$ が使えるようになっている. なお, この部分は次のような計算でもできる.

$$|\overrightarrow{CH}|^2=|s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}|^2$$
$$=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})$$
$$=|s\vec{a}+t\vec{b}|^2-2\vec{c}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})+|\vec{c}|^2$$

ここで, $\overrightarrow{CH}=\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ より

$$\vec{c}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=|s\vec{a}+t\vec{b}|^2-\vec{n}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$$

ところが, $\vec{n}\cdot\vec{a}=\vec{n}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$\vec{c}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})=|s\vec{a}+t\vec{b}|^2$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{CH}|^2=|s\vec{a}+t\vec{b}|^2-2|s\vec{a}+t\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$
$$=|\vec{c}|^2-|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=OC^2-OH^2$$

一般的な扱いは, 次のようになる. **問題 A** と**問題 B** は, $s\vec{a}+t\vec{b}-k\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ という関係で共通している (実は初めこのことに気付かずに**問題 B** で補助的に, **問題 C** を考えたのであった). 今までは, s, t, k を先に与えたのであるが, 今度は逆に, s, t, k について解いてみよう.

以下, $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ を1次独立なベクトルとする.

$$\overrightarrow{CH}=k\vec{a}\times\vec{b}=k\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$
$$=s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

これから, 次の連立1次方程式を得る.

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & -(a_2b_3-a_3b_2)\\a_2 & b_2 & -(a_3b_1-a_1b_3)\\a_3 & b_3 & -(a_1b_2-a_2b_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots ③$$

これを, クラメールの公式で解くと

$$s=\frac{A}{|\vec{a}\times\vec{b}|^2},\quad t=\frac{B}{|\vec{a}\times\vec{b}|^2},$$

$$k=\frac{\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}}{|\vec{a}\times\vec{b}|^2}$$

$$A=-(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$-(a_3b_1-a_1b_3)(b_3c_1-b_1c_3)$$
$$-(a_2b_3-a_3b_2)(b_2c_3-b_3c_2)$$
$$B=(a_1b_2-a_2b_1)(a_1c_2-a_2c_1)$$
$$+(a_3b_1-a_1b_3)(a_3c_1-a_1c_3)$$
$$+(a_2b_3-a_3b_2)(a_2c_3-a_3c_2)$$
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

一方, 内積を使った計算では, ①, ②より

$$s=\frac{|\vec{b}|^2(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$
$$t=\frac{|\vec{a}|^2(\vec{b}\cdot\vec{c})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

これらの s, t の別々の式は, 勿論一致する. しかし, 内積を使った方は, k に関する項が消えてしまい k が求まらないので, 以下にみるような体積の計算がすぐにできない. そういう意味では昨年度の**問題 A** の方法の方が優れていることを, 改めて感じた. 最後に, 四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\vec{a}\times\vec{b}||\overrightarrow{CH}|\ \text{で}$$

$$|\overrightarrow{CH}|=|k||\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\right|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$$

なので, これを代入すれば, 周知の結果を得る.

(愛知県立名古屋西高等学校)