正弦比によるチェバの定理とその応用について

入砂（いりすな） 七五三一（しめいち）

1. はじめに

数研通信 19 号に Irisuna の定理（メネラウスの定理・チェバの定理を含む）がどんな定理かを発表してから，22 号では第 2 定理からの発展として線束の定理，27 号では第 3 定理，共線定理，共点定理，32 号では Irisuna の定理を一般化した連鎖定理を発表した．さらに，数研通信 34 号ではニュートンの定理の拡張のいくつかを発表した．

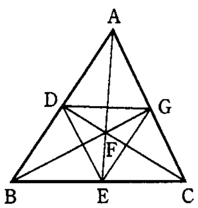
今回はチェバの定理を正弦比で表して，三角形の五心やブリアンションの定理を証明し，発展教材の研究としたい．

まずは，すでに発表した Irisuna の定理，第 2 定理をあげて準備とします．

2. Irisuna の定理

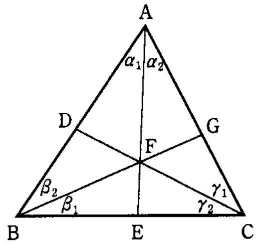
> ⚠ABC（DEG，F）で，点Pは周および内部の線分上を動くものとすると，点 A，B，C，D，E，F，G のどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は 1 である．　（数研通信 19 号参照）

3. 第 2 定理

> Irisuna の定理で，動点Pが線分 DG，GE，ED 上は返り点 0 で動くことにすると，点 A，B，C，D，E，F，G のどこから動いても，再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は 1 である．　（数研通信 22 号参照）
>
> 
>

次に，チェバの定理を正弦比で表すことを考える．

4. 正弦比によるチェバの定理

> (1)　△ABC で AB，BC，CA 上にそれぞれ点 D，E，G をとる．図のように角 α_1，α_2；β_1，β_2；γ_1，γ_2 をとる．このとき，3 直線 AE，BG，CD が 1 点Fで交わるならば，
>
> 
>
>
> $$R_0{}^3：\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1 \quad\cdots\cdots\ (A_1)$$
>
> 逆も成り立つ．

証明）　面積比から

$$\frac{BE}{EC}=\frac{AB\cdot AE\sin\alpha_1}{AC\cdot AE\sin\alpha_2} \quad\cdots\cdots\ ①$$

$$\frac{CG}{GA}=\frac{BC\cdot BG\sin\beta_1}{AB\cdot BG\sin\beta_2} \quad\cdots\cdots\ ②$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC\cdot CD\sin\gamma_1}{BC\cdot CD\sin\gamma_2} \quad\cdots\cdots\ ③$$

①×②×③ から

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AD}{DB} \quad\cdots\cdots\ ④$$

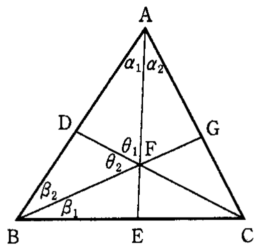
一方，チェバの定理から

$$\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CG}{GA}\cdot\frac{AD}{DB}=1 \quad\cdots\cdots\ (C_1)$$

が成り立つ．

よって，④，(C_1) から (A_1) が成り立つ．

逆に，(A_1) が成り立つならば，①×②×③ から (C_1) が成り立つ．したがって，チェバの定理の逆より，3 直線 AE，BG，CD は 1 点Fで交わる．

> (2)　△ABC で AB，BC，CA 上の点を D，E，G とし，AE，BG の交点をFとする．図のように角 α_1，α_2；β_1，β_2；θ_1，θ_2 をとる．こ
>
> 
>

のとき，3 直線 AG，BE，DF が 1 点Cで交わるならば，

$$R_2^3(1):\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\sin A}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin B}=1 \cdots\cdots (A_2)$$

逆も成り立つ．

証明） 面積比から

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AF\cdot DF\sin\theta_1}{BF\cdot DF\sin\theta_2} \cdots\cdots ①$$

$$\frac{BG}{GF}=\frac{AB\cdot AG\sin A}{AF\cdot AG\sin\alpha_2} \cdots\cdots ②$$

$$\frac{FE}{EA}=\frac{BF\cdot BE\sin\beta_1}{AB\cdot BE\sin B} \cdots\cdots ③$$

①×②×③ から

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\sin A}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin B}=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FE}{EA} \cdots\cdots ④$$

一方，チェバの定理から

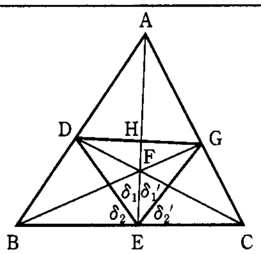
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FE}{EA}=1 \cdots\cdots (C_2)$$

が成り立つ．

よって，④，(C_2) から (A_2) が成り立つ．

逆に，(A_2) が成り立つならば，①×②×③ から (C_2) が成り立つ．したがって，チェバの定理の逆より，3 直線 AG，BE，DF は 1 点Cで交わる．

(3) △ABC で AB，BC，CA 上にそれぞれ点 D，E，G をとる．図のように角 δ_1，δ_2；δ_1'，δ_2' をとる．このとき，3 直線 AE，BG，CD が 1 点Fで交わるならば，



$$R_2^3(2):\frac{\sin\delta}{\sin\delta_2}\cdot\frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_1'}\cdot\frac{\sin\delta_2'}{\sin\delta'}=1 \cdots\cdots (A_3)$$

$$(\delta_1+\delta_2=\delta,\ \ \delta_1'+\delta_2'=\delta')$$

逆も成り立つ．

（証明略） ［練習問題 1］

次に，三角形の五心の定理の別証を試みる．

5. 正弦比によるチェバの定理の応用

三角形の五心

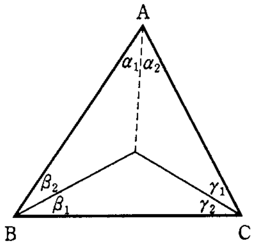
ア）《**内心**》

△ABC の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる．

証明） $\alpha_1=\alpha_2$，$\beta_1=\beta_2$，$\gamma_1=\gamma_2$ より

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

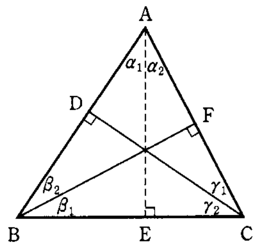
よって，3 直線は 1 点で交わる．



イ）《**垂心**》

△ABC の各頂点から対辺に下ろした 3 つの垂線 AE，BF，CD は 1 点で交わる．

証明）



$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$$

$$=\frac{\sin(90^\circ-B)}{\sin(90^\circ-C)}\cdot\frac{\sin(90^\circ-C)}{\sin(90^\circ-A)}\cdot\frac{\sin(90^\circ-A)}{\sin(90^\circ-B)}=1$$

よって，3 つの垂線は 1 点で交わる．

ウ）《**外心**》

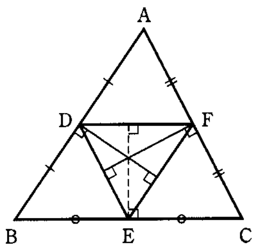
△ABC の各辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．

証明） 中点連結定理から

DE∥AC，DF∥BC，EF∥AB

よって，△DEF の 3 つの垂線は 1 点で交わる（垂心）．

したがって，3 つの垂直二等分線も 1 点で交わる．



エ）《**重心**》

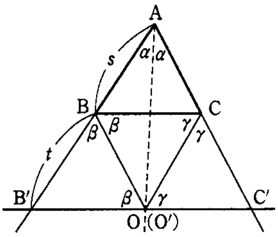
三角形の各頂点と対辺の中点を結んだ 3 つの線分は 1 点で交わる．

この証明は線分比によるチェバの定理で明らかである．

オ）《傍心》

> △ABCで∠Aの二等分線と∠B，∠Cの外角の二等分線は1点で交わる．

証明) ∠B，∠Cの外角の二等分線の交点Oを通って BC∥B′C′ なる点B′，C′をAB，ACのそれぞれの延長上にとる．



AB＝s，BB′＝t とすると，BC∥B′C′ より

AC＝sk，CC′＝tk とおける．

△BOB′，△COC′はそれぞれ二等辺三角形であるから　B′O：OC′＝t：tk＝1：k …… ①

一方，∠Aの二等分線とB′C′の交点をO′とすると

$$B'O' : O'C' = (s+t) : (sk+tk) = 1 : k \quad \cdots\cdots ②$$

よって，①，②から，点 O＝O′

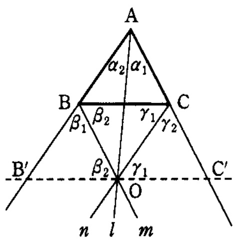
ゆえに，直線 AO＝AO′

したがって，3直線は1点で交わる．(証明終)

この定理と証明は次の定理に拡張される．

6. 傍心定理の拡張

> △ABCの∠Aの内角を分割する直線をlとし，AC，l；AB，lのそれぞれのつくる角をα_1，α_2とする．
> また，∠B，∠Cの外角を分割する直線をそれぞれm，nとし，BCとm；ABの延長とmのそれぞれのつくる角をβ_2，β_1とする．BCとn；ACの延長とnのつくる角をそれぞれγ_1，γ_2とすると，3直線l，m，nが1点で交わるか，または平行である条件は
>
> $$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1 \quad \cdots\cdots (A)$$
>
> である．



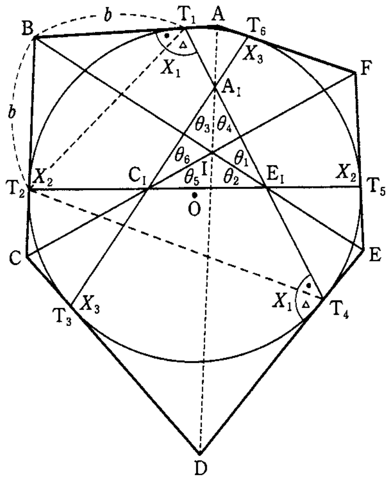
(証明略) ［練習問題5］

次に，正弦比によるチェバの定理を応用して，ブリアンションの定理を証明する．

7. ブリアンションの定理の別証

> **[定理]** 円に外接する六角形ABCDEFの相対する頂点を結ぶ3つの対角線は1点で交わる．

証明) 正弦比によるチェバの定理を用いて3つの対角線AD，BE，CFが1点で交わることを証明する．



まず，各点と角度θ_1，θ_2，……，θ_6；X_1，X_2，X_3を図のようにとる．つまり六角形の辺AB，BC，CD，DE，EF，FAと円の接点をそれぞれT_1，T_2，T_3，T_4，T_5，T_6；対角線BE，CFの交点をIとすると

> 3直線AD，T_1T_4，T_3T_6は1点で交わる(**問題3の補題を参照**)

から，その交点をA_Iとする．

同様に，3直線BE，T_1T_4，T_2T_5；CF，T_2T_5，T_3T_6のそれぞれの交点をE_I，C_Iとする．

また，$BT_1=BT_2=b$，$DT_3=DT_4=d$，$FT_5=FT_6=f$ とおける．

$\triangle A_IC_IE_I$で正弦比によるチェバの定理

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}\cdot\frac{\sin\theta_5}{\sin\theta_6}=1$$

が成り立つことを証明する．

まず，接弦定理から

$$\begin{aligned}\angle BT_1E_I &= \angle BT_1T_2+\angle T_2T_1T_4\\ &= \angle T_1T_4T_2+\angle T_2T_4D\\ &= \angle DT_4A_I = X_1 \quad \text{注)}\end{aligned}$$

とおく．

同様にして，$\angle BT_2E_I=\angle FT_5C_I=X_2$，
$\angle DT_3A_I=\angle FT_6C_I=X_3$ とおける．

正弦定理を $\triangle T_1BE_I$，$\triangle T_2BE_I$ に用いて

$$\frac{b}{\sin\theta_1}=\frac{BE_I}{\sin X_1} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{b}{\sin\theta_2}=\frac{BE_I}{\sin X_2} \quad \cdots\cdots ②$$

②÷① から $\quad \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{\sin X_1}{\sin X_2} \quad \cdots\cdots$ (A)

同様に，$\triangle T_3DA_I$，$\triangle T_4DA_I$ に正弦定理を用いて

$$\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}=\frac{\sin X_3}{\sin X_1} \quad \cdots\cdots \text{(B)}$$

同様に，$\triangle T_5FC_I$，$\triangle T_6FC_I$ に正弦定理を用いて

$$\frac{\sin\theta_5}{\sin\theta_6}=\frac{\sin X_2}{\sin X_3} \quad \cdots\cdots \text{(C)}$$

(A)×(B)×(C) から

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}\cdot\frac{\sin\theta_5}{\sin\theta_6}=\frac{\sin X_1}{\sin X_2}\cdot\frac{\sin X_3}{\sin X_1}\cdot\frac{\sin X_2}{\sin X_3}=1$$

よって，正弦比によるチェバの定理が成り立つ．
したがって，3つの対角線 AD，BE，CF は1点 I で交わる． (証明終)

注）対称性より $\angle BT_1E_I=\angle DT_4A_I$ が成り立つ．

8. 練習問題 (問題3，4は正弦比によるチェバの定理または傍心定理の拡張を利用する)

≪問題1≫ チェバの定理4. (3) $R_2{}^3(2)=1$ を証明せよ．(逆も成り立つ)

≪問題2≫ ブリアンションの定理の証明で，正弦定理のかわりに面積比(正弦)を用いて証明せよ．

≪問題3≫ 円に外接する四角形とその接点を結んでできる内接する四角形のそれぞれの対角線の交点は一致する．(補題)

≪問題4≫ 円に内接する六角形 ABCDEF の相対する頂点を結ぶ3つの対角線 AD，BE，CF が1点で交わる条件は

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

である．これを証明せよ．

≪問題5≫ 傍心定理の拡張を証明せよ．

9. 今後の課題

Irisuna の定理に関連した数研通信での発表は6回になりました．これまでの研究の結果を教育の現場にいかに具現化するかは，ひき続き今後の課題であります．そして，Irisuna の定理を一般化した連鎖定理(参考資料1)を問題の解法にどんどん使ってゆけば，Irisuna の定理が生きたものとして働くことになると考えます．このあたりを含めて，まだまだ，検討課題が山積しております．また，連鎖定理の多面体や曲面への発展も研究しているので，発表の機会を得たいと考えております．なお，参考資料に正弦比によるメネラウスの定理，ニュートンの定理の拡張をあげておきましたので検討して頂ければ幸いです．

(愛知県立一宮興道高等学校)

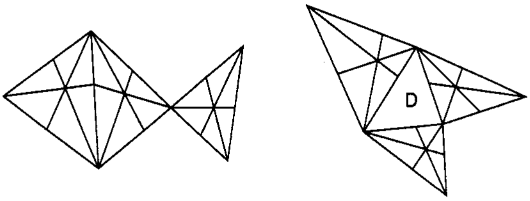
《参考文献》

1) 岩田至康編：幾何学大辞典，槇書店
2) 清宮俊雄著：幾何学―発見的研究法―，科学新興社
3) 入砂七五三一：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，数研通信19号，数研出版('94)
4) ：Irisuna の定理，数研通信22号，数研出版('95)
5) ：Irisuna の定理と共線定理，共点定理について(Menelaos の定理・Ceva の定理を含む)，数研通信27号，数研出版('96)
6) ：Irisuna の定理と連鎖定理(Menelaos の定理・Ceva の定理を含む)，数研通信32号，数研出版('98)
7) ：Newton の定理の拡張について―Irisuna の定理―，数研通信34号，数研出版('99)
8) ：Irisuna の定理(メネラウスの定理・チェバの定理を含む)，(石田教育賞)，I. F. Report 第22号，財団法人石田財団('95)
9) ：Irisuna の定理と線束の第3定理(Menelaos の定理・Ceva の定理を含む)，イプシロン，愛知教育大学数学教育学会誌第37巻('95)
10) ：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について―Irisuna の定理―，日数教学会誌第76巻，77巻，78巻，79巻，80巻臨時増刊，日数教三重，東京，長崎，群馬，山口大会提案資料('94,'95,'96,'97,'98)
11) ：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について―Irisuna の定理―，研究集録愛数33号，34号，35号，36号(愛知県高等学校数学研究会)('95,'96,'97,'98)
12) ：“メネラウス・チェバの定理の拡張について”，平成5年度県立学校教職員個人研究研究集録(愛知県教育委員会)('94)
13) ：メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について―Irisuna の定理の発展―，平成6年度愛知県高等学校数学研究会尾張地区研究発表大会提案資料('95)

《参考資料》

資料１　(Irisunaの)連鎖定理

Irisunaの定理を表す三角形が一辺(３点共有)または互いに頂点(１点共有)で連鎖する図形において，点Ｐはの周および内部の線分上を動くものとすると，動点Ｐが再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Ｐに対応する線分の比の積は１である．
ただし，内部にを含まない領域Ｄがある場合は，このＤの外周に対応する線分の比の積は１になるものとする．　(数研通信32号 参照)



資料２　正弦比によるメネラウスの定理

(1)　△ABCでAB，BC上にそれぞれ点D，Eをとる．AE上に点Fをとって，図のように角α_1，α_2；β_1，β_2；δ_1，δ_2をとる．このとき，３点D，F，Cが一直線上ならば，

$$R_1^3 : \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2}\cdot\frac{\sin A}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=1 \quad\cdots\cdots\ (B_1)$$

逆も成り立つ．(図１)

(2)　△ABCで，AB上に点Dをとり，CD上に点Fをとり，AFの点F側への延長上に点Eをとる．図のように角α_1，α_2；θ_1，θ_2；γ_1，γ_2をとる．そうすると３点B，E，Cが一直線上ならば，

$$R_3^3 : \frac{\sin\theta}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\sin A}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda}=1 \quad\cdots\cdots\ (B_2)$$

$$(\lambda_1+\lambda_2=\lambda,\ \ \theta_1+\theta_2=\theta)$$

逆も成り立つ．(図２)

図１

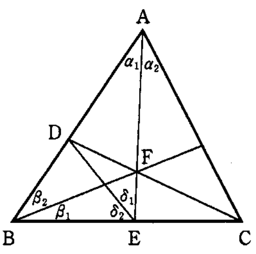
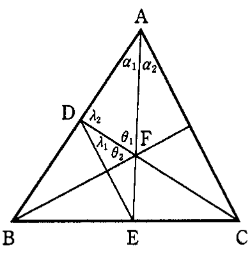


図２



資料３　円に外接する四角形でのニュートン線の拡張Ⅱ

(Irisunaの定理)

円に外接する四角形ABCDの対角線BD，AC上の点をそれぞれM，Nとするとき，点M，O，Nが一直線上ならば，
BM：MD＝λ：１ のときは
　　AN：NC＝(λAD－AB)：(λCD－BC)
である．
また，直線MOがACと交わるとき，逆も成り立つ．　(数研通信34号 参照)