歴史的流れで「積分」の学習について考える

富永(とみなが)　雅(まさる)，原田千華子(はらだちかこ)

1. はじめに

学習内容を問わず，何かを学ぶ上でそれに関わる適切な動機付けを与えることは，学ぶ者にその学習への興味を増大させ，意義を認識させ，後の学習に大きな影響を与えるという意味で重要である．故に学習の導入には，注意が払われるべきであり，このことはどの教科にも共通することで，これが本質の理解につながる．

勿論，このことは，高校生が数学の授業で新しい分野を学習しようとするときにもいえることで，動機付けの弱い学習では，その内容を身につけることが困難になるばかりではなく，「どうしてこのようなことを学習しなくてはならないのだろう」という気持ちをも抱かせかねない．

しかし，現在の高校数学の内容を検討すると，この「動機付け」という点が十分には考慮されていないようである．特に，本稿で論じる「積分法」の導入については，動機付けがほとんどなされていないように感じられる．

ところで，2003年より新しく採用される「高等学校学習指導要領 数学」では，新設科目として(全生徒が履修するわけではないが)「数学基礎」が導入され，「数学史」も取り上げられるそうである．新指導要領については様々な点で賛否両論があるであろうが，この「数学史」については，数学を学習する上での動機付けを得ることにもつながるのではないかと考える．また，このことを深く学ぶと哲学的にも興味が引かれる．

本稿では，今回学習指導要領が改訂され，「数学史」が取り入れられたのを機に，積分法の導入がどうあるべきかについて行った考察を以下で展開していきたい．

2. 高校での積分法の導入と積分法の発展過程

この300年間で著しい発展を遂げた積分は高等学校の数学IIで初めて取り上げられ，数学IIIでより深く学習するようになっている．

その積分法の導入であるがそれは不定積分から始まり，主なところでは，定積分，面積，区分求積法へと話が進む．それぞれの内容は次のようになっている．

(1) **不定積分**　ある区間で定義された関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち $F'(x)=f(x)$ となる $F(x)$ の1つ1つを不定積分(ここでは，不定積分と原始関数を区別しないことにする)といい，$\int f(x)dx$ で表す．

(2) **定積分**　$f(x)$ をある区間Ⅰで定義された関数とし，$F(x)$ をその不定積分の1つとするとき，2数 a，$b \in \mathrm{I}$ に対して，a，b の大小によらず，$F(b)-F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの定積分といい，$\int_a^b f(x)dx$ で表す．

(3) **面積**　区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ であるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は $\int_a^b f(x)dx$ で求められる．

(4) **区分求積法**　区間 $[a,\ b]$ で $f(x)$ の値が正のとき，区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点の座標を a に近い方から順に $a=x_0$，x_1，x_2，……，$x_n=b$ とし $\Delta x=(b-a)/n$ とすると，任意の $c_k \in [x_{k-1},\ x_k]$ に対して面積 $S\left(=\int_a^b f(x)dx\right)$ は $n \to \infty$ のときの $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$ の極限値である．

高校では，大まかではあるが以上の(1)から(4)の順で学習される．しかしながらこの順は，歴史的に積分法が成立してきた順序とは異なるようである．

積分の歴史をひもとくと，古くはギリシアの原始的解析学者アンティフォンから近代のテイラー，マ

クローリン，ロピタル，コーシー等に至るまで多くの偉大な数学者によりその概念が確立されてきたことは言うまでもない．特に，17，18世紀で後の積分法の発展に大きな影響を与えたのがニュートン，ライプニッツである．

ニュートン（英 1642-1727）は，三大法則①光の分散，②万有引力の法則，③微分積分学（当時，微分は流率，積分は流量といわれていた）の他，あらゆる時代を通じて賞賛されている著書「プリンキピア（自然哲学の数学的原理）」によりよく知られている．ニュートンは，物理的な速度から微分を，線分の運動から積分を扱った．

一方，ライプニッツ（独 1646-1716）は，ニュートンと同時期に，独立に，曲線と接線の問題から積分が微分の逆算であることを推察した．また，有用な微分記号「dx」や積分記号「$\int$」を生み出し，その後の微分積分学の進歩に大きく寄与した．

この二人の数学者による偉大な成果の一つに，微分積分学の基本定理がある．周知の通り，これは微分（あるいは，不定積分）と定積分とを結びつけるものであるが，ここで積分という言葉には２つの流れがあることに注意しなければならない．

一方は，不定積分，例えば，「$2x$ の積分は x^2 である．$\left(\int 2x\,dx = x^2 + C\right)$」というような場合で，微分の逆演算を意味する．他方は定積分，面積を求める場合に用いられる $\int_a^b f(x)dx$ の形のもので，無限項の和を意味する．

この２つを定理で結びつけることによって，本来，定積分では，（面積の場合）各小部分の面積を求め，その和を作り，その極限を求めるという計算を容易にする点にその定理の有用性がある．

これらのことからすると，およそ積分の歴史的流れは，

図１

微分 → 不定積分 ＼
（例えば求積問題による）定積分 ／ → 微分積分の基本定理での連結

に近い．（近いと表現するのは，例えば，ニュートンの場合，面積からではなく線分の運動から積分を扱ったというように，導入としての積分の扱われ方が異なるからである．）

一方，先に述べたことからも明らかなように，高校の学習内容は，

図２

微分→不定積分→定積分→面積→区分求積法

という流れになっている．両者の相違で本稿において注目したいのは，図１のように定積分が面積と関連して導入されているか，あるいは，図２のように定積分が不定積分という考えを間に入れて微分から導入されているかという点である．次節では，この両者における定積分の導入を考えていきたい．

3. 歴史的流れによる積分法の導入

先日ふと指導要領の関連書物をみていて次のような記述を見つけた．

「関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で，$f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，直線 $x=b$ および，x 軸で囲まれた図形の面積を求めていく手法を通して，定積分の考えを導くなどの方法もある．」

つまり現在ではどの教科書でも，図２の流れでしか導入されていない積分法の定義が，図１のような流れでも認められていることになる．これは，実際に授業をするまであまり気にすることのなかったことだが，よく言われるように図形やグラフなどフィギュアな面から迫りバックボーンを理解させるためにはもっともなことであり，それ故に興味深いところである．したがって，なぜ図１のような流れが主流にならないかという疑問を抱かせることになる．更に歴史的にみても，こちらの方が適切であると考えられる．

図２のような学習構成がなされる理由を指導する立場から推測すると，

1．微分を学習した直後ということもあり，「微分の逆計算を考えてみよう．その計算を不定積分というんだよ．」として積分法を導入する方が単純な計算ですみ，面積のように極限を用いた概念を必要としない．

2．微分から定積分へのクッションとして不定積分を設けることができるので，そこで基本的な計算の演習をさせ，導関数の理解を深めることになる．

3．面積との関係は後で学習しても違和感がない．

等があげられるのではないだろうか．

しかしながら，この1～3では，定積分を学ぶ必要性を十分に感じさせることができない．現在高校で微分積分の学習を支えているのは，大学進学という動機付けがあるからであり，学問自体への興味からではないと断定せざるを得ない残念な状況がある．これは，高校数学全体の傾向でもあるわけで，その影響もあり，生徒からすると図2のような導入のされ方をしても違和感を感じないのであろう．

また，このことにより動機付けが弱まるということの他に，図2による導入は次の点で多少の問題があるように感じる．

1．$\{f(x)\}$ から $\{F(x)\}$ への対応は積分定数を考慮すると一対一ではなく，逆演算を考える必要性が乏しい．

2．ライプニッツによる表記方法は確かに有効だが，必要性を感じていない者にとっては馴染みにくいものである．積分の記号 $\int_a^b f(x)dx$ は，dx が n を限りなく大きくしていくときの分割長方形の究極の幅に相当し(区分求積法の時，$[a,\ b]$ を n 等分したときの1つに相当する．)，$f(x)$ は長方形の高さに当たり，$\int$ は和(sum)を意味する．このことからもこのすばらしい表記法を理解させる必要がある．

3．安易に計算を中心として積分を導入することは，その学問の必要性を感じさせることができず，その分野によい影響を及ぼさない．

4．大学で学習する二重積分をこの考えでは定義できない．

5．図1で積分を定義することにより積分の線形性の証明ができる．

このようなことから，図1による積分の導入があっても不思議ではないと考えられるし，より厳密な議論をしようとする場合においては図1で行うべきである．大学においては理科系学生は必ず「微分積分学」を履修するが，そのときには勿論，図1により導入され，より精密な議論がなされている．この節の最後に，一般に，図1により定積分が導入された場合，不定積分は $\int_a^x f(x)dx$ で与えられることを付記しておく．

4. おわりに

前回や今回の指導要領の改訂をみていても分かるように数学の扱われ方には注意を払う必要がある．学校では「重要な科目だ」と位置づけられていても，その重要性は本来の学問としてのものではなく，例えば，大学入試等によるものであり，本来あるべき姿を失っているように感じる．これでは，本来の数学の魅力を知ることができず，危機的状況に陥るだけである．また，我々教師側からしても現在の状況では授業をすればするほど，単元が進めば進むほど確かに高度な内容を教えている一方で，このまま教科書通りでは，「私は数学に向いていない」と考えてしまう生徒を作り出してしまうことになりかねない．勿論手をこまねいているわけではなく，我々自身，教科書の流れに沿って授業をしつつも，その単元に関連のある興味ある内容を生徒に提示したりと工夫してはいるが，現在の状況の中では限界がある．

現場での様子を見る限り，ここ数年でさらに一層「微分積分」離れが進んでいるように感じるのは我々だけであろうか．「一次変換」がなくなり，「複素平面」がなくなろうとしている今，「微分積分」もなくなってしまうのではと考えるのは杞憂であろうか．

『解析教定(Analysis by Its History)』(1997年，E.ハイラー/G.ワナー著，蟹江幸博訳，シュプリンガー・フェアラーク東京)には，我々と同様のことを主張している部分がある．つまり，現代の解析教科書は，

(集合・写像⇒極限・連続⇒) 導関数⇒積分

の順序で書かれているが，歴史的には全く反対の順序で発展してきたのであり，この歴史的順序に沿って教えることが教育上有効であるという主張である．

微積分は2回学習する必要があるとよく言われる．(1回目は計算が目標で，2回目は理論的な基礎を学ぶことが目標である．)そこで，1回目の役割は，高校が担うことになろう．しかし，ここでの本質理解が不可能に近い現状を考慮すると，2回目の役割を担うであろう大学においては，学生が初等関数の不定積分を求め，問題を解く技術としてのみ積分を見るのではなく本質の理解に努め，知的興奮を引き起こすことを期待するばかりである．

最後に，現在の危機的数学の状況に対し，ニュートンによる次の言葉を紹介することにする．

「涯しない真理の大海はまだ探求されないで私(我々)の前に拡がっているのであって，永遠に続く人類の歩みは常に前向きでなければならない」

(育英西高等学校教諭，大阪教育大学大学院生)